УДК 519.1

Существование неподвижных точек для отображений конечных множеств

В.И.Данилов, Г.А.Кошевой

В случае выпуклых компактных множеств K имеются два близких результата существования. Первый утверждает существование нулевых точек непрерывного (и направленного внутрь) векторного поля на K. Второй - существование неподвижных точек непрерывного отображения K в себя. Мы показываем, что похожие результаты верны и в том случае, когда X - конечное "выпуклоподобное" подмножество. Конечно, главное тут - правильно сформулировать понятие "непрерывности".

Эта работа была инициирована недавней статьей Иимура [1]. В ней приводится формулировка утверждения подобного типа. Приведенное доказательство содержало явную ошибку; позже в [2] был построен контрпример. В настоящей работе мы приводим общую формулировку теоремы существования нулевых точек, основанную на понятии "близости" на X. В терминах "близости" мы формулируем как "непрерывность" (мы называем это плавностью) векторного поля, так и требование "выпукло-подобности" (мы называем это ацикличностью). Если эти два требования выполнены, то существует нуль векторного поля (или неподвижная точка отображения). В ситуации, когда X состоит из целых точек в $\mathbb{R}^n$, мы получаем правильный вариант теоремы Иимура (независимо доказанный в [2]).

1 Выпуклый случай

В дальнейшем V означает конечномерное вещественное пространство. Говоря о топологии, мы всегда имеем в виду каноническую топологию на V.

Классическим утверждением о неподвижной точке является теорема Брауэра.

Теорема 1. *Пусть K - выпуклый непустой компакт в V, и f - непрерывное отображение K в себя. Тогда существует точка $x^* \in K$, такая что $f(x^*) = x^*$.*

Близким является утверждение о нулях векторных полей. *Векторным полем* будем называть отображение в V. Например, если f - отображение K в себя, то $v(x) = f(x) - x$ задает векторное поле на K, непрерывное для непрерывного f. Заметим также, что это векторное поле направлено "внутрь" K. Чтобы придать этому точный смысл, введем понятие касательного конуса.

Пусть K - выпуклое подмножество V, и x - точка K. Вектор $v \in V$ называется *касательным к K в точке x*, если точка $x+tv$ принадлежит K для некоторого $t > 0$. Множество всех касательных векторов обозначается $Con(K, x)$. Это выпуклый, хотя не всегда замкнутый конус. Заметим, что если x - относительно внутренняя точка K, то $Con(K, x)$ превращается в "касательное" пространство $\mathbb{R}(K - K)$. Для дальнейшего нам понадобится следующая простая

Лемма. *Если точка z является нетривиальной выпуклой смесью точек x и y из K, тогда $Con(K, x) \subset Con(K, z)$ (и аналогично для $Con(K, y)$(.*

Векторное поле v на K направлено *внутрь*, если $v(x) \in Con(K, x)$ для любого $x \in K$.

Теорема 1'. *Пусть K - непустое выпуклое компактное подмножество в V, и v - непрерывное и направленное внутрь векторное поле на K. Тогда существует точка x^*, такая что $v(x^*) = 0$.*

Эти две теоремы легко сводятся одна к другой. Теорема 1 очевидно вытекает из теоремы 1'. Чтобы показать обратное, воспользуемся следующей вспомогательной конструкцией. Снабдим V структурой евклидова пространства и пусть B - замкнутый шар в V, содержащий K. Пусть, наконец, $r : B \to K$ - ретракция, сопоставляющая точке b

из B ближайшую к ней точку $r(b)$ из K. Очевидно, что r непрерывное (и даже липшицево) отображение. Теперь рассмотрим отображение $g : K \to K$, $g(x) = r(x + v(x))$. Это непрерывное отображение и для него существует неподвижная точка x^*. Это значит, что точка x^* - ближайшая из K к $x^* + v(x^*)$. В частности, скалярное произведение $(v(x), w) \leq 0$ для любого w из касательного конуса $Con(K, x^*)$. Так как вектор $v(x)$ также принадлежит этому касательному конусу, то $(v(x^*), v(x^*)) \leq 0$, откуда $v(x^*) = 0$. $\square$

В дальнейшем нам будет нужен "многозначный" вариант теоремы 1'. Пусть M - компактное метрическое пространство, и $p : M \to K$ - сюръективное непрерывное отображение, все слои которого $p^{-1}(x)$ ацикличны (например, стягиваемые). Пусть, наконец, $v : M \to V$ - непрерывное векторное поле, направленное "внутрь" K в том смысле, что $v(m) \in Con(K, p(m))$ для любой точки $m \in M$.

Теорема 1". *В этой ситуации существует точка $m^* \in M$, такая что $v(m^*) = 0$.*

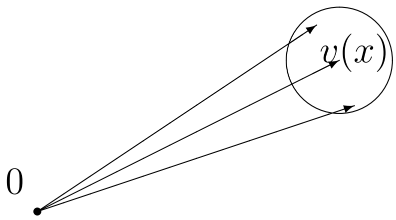
Доказательство использует тот же трюк с ретракцией $r : B \to K$. Построим другое отображение $g : M \to K$, полагая $g(m) = r(p(m) + v(m))$. По теореме Эйленберга-Монтгомери [3] существует точка m^*, такая что $p(m^*) = g(m^*)$. То есть $p(m^*)$ - ближайшая из K точка к $p(m^*) + v(m^*)$. Далее все завершается как выше. $\square$

1 Дискретный случай

Мы хотим получить утверждение, аналогичное теореме 1, заменив выпуклый компакт K конечным множеством X (и обозначая через K многогранник co(X) - выпуклую оболочку множества X). Главная проблема состоит в двух вещах. Нам нужно как-то формализовать понятие "непрерывности" и как-то правильно использовать "выпуклость". Обе эти вещи мы предлагаем реализовать с помощью понятия близости на X.

Определение. *Отношением близости* (или толерантности) на множестве X называется рефлексивное и симметричное бинарное отношение $\mathcal{T}$ на X. Подмножество S называется *кликой*, если все члены S близки между собой (иначе говоря, $S \times S \subset \mathcal{T}$).

Перейдем теперь к формализации понятия "непрерывности" векторного поля v, определенного на X. Чтобы подойти к этому, вернемся снова к непрерывному случаю. Рассмотрим некоторую точку x. Если $v(x) = 0$, все в порядке. В противном случае для точек x', близких к x, вектора $v(x')$ также близки к $v(x)$. Например, находятся в ε-шаре вокруг $v(x)$. Если C - конус, порожденный шаром $v(x) + \varepsilon B$, то при малом ε он будет заостренным в нуле.



Отталкиваясь от этого наводящего соображения, дадим

Определение. Скажем, что векторное поле v на X $\mathcal{T}$-*плавное*, если для любой клики S множество $v(S) = \{v(s), s \in S\}$ содержится в некотором заостренном конусе.

Конечно, это означает, что если 0 принадлежит $\text{co}(v(S))$, то для некоторого $s \in S$ мы имеем $v(s) = 0$. Интуитивно - в близких точках вектора направлены в одну сторону.

Вторая часть требований интуитивно означает, что близость $\mathcal{T}$ превращает X в ацикличный объект. Для этого мы стандартным способом свяжем с $\mathcal{T}$ симплициальный комплекс $|\mathcal{T}|$. По определению, $|\mathcal{T}|$ состоит из вероятностных мер μ на X, удовлетворяющих следующему ограничению: носитель $supp(\mu) := \{x \in X, \mu(x) > 0\}$ меры μ является кликой. Топология на $|\mathcal{T}|$ вводится естественным способом. Определим теперь отображение $p : |\mathcal{T}| \to K = co(X)$ по линейности:

$p(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)x$. Очевидно, это непрерывное отображение.

Определение. Скажем, что близость $\mathcal{T}$ на $X \subset V$ *ациклична*, если отображение $p : |\mathcal{T}| \to co(X)$ сюръективно, и для любой точки $\xi \in co(X)$ ее прообраз $p^{-1}(\xi)$ является ацикличным топологическим пространством.

Несколько грубо это означает, что от любого представления точки ξ как выпуклой комбинации некоторой клики к любому другому такому представлению можно перейти непрерывным образом.

Сформулируем теперь наш главный результат.

Теорема 2. *Пусть на конечном множестве $X \subset V$ задано векторное поле v, направленное внутрь $K = co(X)$. Предположит также, что на X имеется близость $\mathcal{T}$, удовлетворяющая двум требованиям:*

1(поле v $\mathcal{T}$-плавное,

2(близость $\mathcal{T}$ ациклична.

Тогда существует точка $x^* \in X$, такая что $v(x^*) = 0$.

Следствие. *Пусть $f : X \to X$ отображение. И пусть $\mathcal{T}$ - ацикличная близость на X, такая что векторное поле v, $v(x) = f(x) - x$, является $\mathcal{T}$-плавным. Тогда существует неподвижная точка f.* $\square$

Доказательство теоремы 2 легко сводится к теореме 1". В самом деле, рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{v} : |\mathcal{T}| \to V$, заданное формулой: $\tilde{v}(\mu) = \sum_x \mu(x)v(x)$. Из Леммы видно, что оно направлено внутрь $K = co(X)$. Так как в силу условия 2) слои отображения $p : |\mathcal{T}| \to K$ ацикличны, а $|\mathcal{T}|$ - метрический компакт, то по теореме 1" существует нуль этого поля, то есть $\mu \in |\mathcal{T}|$, такая что $\tilde{v}(\mu) = 0$.

Пусть теперь $S = supp(\mu)$ - соответствующая клика. По определению $\tilde{v}(\mu) = \sum_{s \in S} \mu(s)v(s)$. В силу условия 1) векторы $v(s)$, $s \in S$, принадлежат некоторому заостренному конусу C в V. Так как $\tilde{v}(\mu) = 0$, то отсюда следует, что для некоторого $s \in S$ мы имеем $v(s) = 0$. $\square$

Требование ацикличности 2) важно, как показывает следующий пример. Пусть X - подмножество прямой, состоящее из четырех точек 0,1,2 и 3. Отображение f переводит 0 в 2, 2 в 3, 3 в 1 и 1 в 0. Точки 0 и 2 близки, как и точки 1 и 3. Ясно, что условие 1) теоремы выполнено, но неподвижных точек у f нет. Конечно, это связано с тем, точка $3/2$ обладает (ровно) двумя представлениями как выпуклая комбинация 0 и 2 и как выпуклая комбинация 1 и 3.

Требование ацикличности выглядит естественным, но трудным для проверки. Ниже мы приведем более удобное (но менее общее) требование. Фактически оно состоит в том, что слои канонической проекции $p : |\mathcal{T}| \to K$ должны быть (непустыми) выпуклыми множествами. В терминах отношения близости это условие формулируется так: пусть точка $\xi \in K$ представлена как невырожденная выпуклая комбинация клики S и S'; тогда их объединение $S \cup S'$ также является кликой. В этом случае доказательство утверждения о существовании нуля векторного поля (или неподвижной точки отображения) может быть проведено с использованием теоремы Какутани вместо теоремы Эйленберга-Монтгомери.

Заметим, что фактически это условие означает наличие полиэдрального разбиения выпуклого многогранника K. А именно, для каждой точки $\xi \in K$ обозначим $S(\xi)$ максимальную клику, такую что ξ представляется как невырожденная выпуклая комбинация элементов из $S(\xi)$. Тогда многогранник K разбивается на клетки $\mathrm{relint}(\mathrm{co}(S(\xi))$. Обратно, если мы имеем полиэдральное разбиение K с вершинами в X (и считаем близкими точки из одного многогранника разбиения), то плавное векторное поле на X имеет нули.

Совсем простой случай возникает, когда полиэдральное разбиение K является на самом деле симплициальным разбиением. Это в точности означает, что отображение $p : |\mathcal{T}| \to K$ взаимно однозначно. В этом случае можно доказывать существование нулей $\mathcal{T}$-плавного векторного поля с помощью теоремы Брауэра (точнее, с помощью теоремы 1').

2 Применение к целочисленным решеткам

До сих пор речь шла про произвольные конечные множества в произвольном (конечномерном) векторном пространстве V. Теперь мы хотим обсудить важный частный случай, когда V есть координатное пространство $\mathbb{R}^n$, а X - конечное подмножество в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$. Дело в том, что пространство $\mathbb{R}^n$ обладает естественным полиэдральным разбиением на целые единичные кубы, и можно этим воспользоваться для организации полиэдрального разбиения $\mathrm{co}(X)$.

Стандартным кубическим разбиением $\mathbb{R}^n$ мы будем называть совокупность кубов $Q_m = m+[0,1]^n$, где m пробегает $\mathbb{Z}^n$. Это действительно полиэдральное разбиение $\mathbb{R}^n$ с вершинами в $\mathbb{Z}^n$.

Полиэдральное разбиение $\mathcal{P}$ многогранника $K = co(X)$ естественно брать состоящим из многогранников $P_m = Q_m \cap K$. Однако мы в первую очередь должны позаботиться о том, чтобы это действительно оказалось X-разбиение, то есть чтобы вершины всех таких многогранников принадлежали X. Для этого мы, конечно, должны считать, что $X = K \cap \mathbb{Z}^n$, то есть (в терминологии авторов) множество X было псевдо-выпуклым. Но этого мало! Мы дополнительно должны потребовать, чтобы все вершины многогранников P_m были целыми!

Определение. Многогранник K в $\mathbb{R}^n$ называется *вполне целым*, если для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ многогранник $Q_m \cap K$ имеет целые вершины. Множество $X \subset \mathbb{Z}^n$ называется *целочисленно выпуклым*, если многогранник $\mathrm{co}(X)$ вполне целый и $X = co(X) \cap \mathbb{Z}^n$.

Конечно, не любой целый многогранник вполне целый. Для этого, например, все его ребра должны быть параллельны векторам, у которых все координаты равны 0 или ± 1. Но все-таки их довольно много. Например, любой целый полиматроид, и многие другие (целые) многогранники. Можно предложить другую характеризацию вполне целых многогранников. Это такие многогранники K, что для любого индекса $i = 1, ..., n$ и любого целого числа k пересечение K с гиперплоскостью $[x = k]$ является целым многогранником.

Близкие (целые) точки относительно этого разбиения - это точки, расстояние между которыми в метрике l_∞ (максимум модуля разности координат) не превышает 1. Понятие "плавности" тоже можно конкретизировать, считая близкими комонотонные вектора. Вектора v и w из $\mathbb{R}^n$ называются *комонотонными*, если $v_i w_i \geq 0$ для любого индекса $i = 1, ..., n$.

Теорема 3. *Пусть K - целочисленно выпуклое конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$. Пусть $v : X \to \mathbb{R}^n$ - векторное поле, такое что для любых близких точек x и y вектора $v(x)$ и $v(y)$ комонотонны. Если, наконец, все вектора $v(x)$ направлены внутрь K, то существует точка $x^* \in X$ с $v(x^*) = 0$.*

Доказательство. В силу Теоремы 2 достаточно убедиться, что поле v является $\mathcal{T}$-плавным. Пусть S - некоторая клика. Сделаем следующее. Припишем индексу i знак $+$, если существует $s \in S$ с положительным $v_i(s)$. Припишем знак $-$, если существует $s \in S$ с отрицательным $v_i(s)$. Из условия комонотонности ясно, что эти назначения знаков непротиворечивы. Наконец, оставшимся индексам припишем знак 0. И эти "знаки" обозначим $\varepsilon(i)$. Тогда все векторы $v(s), s \in S$, принадлежат "ортанту" $\times_i(\varepsilon(i)\mathbb{R}_+)$ в $\mathbb{R}^n$, который, очевидно, является заостренным. $\square$

Замечание. Можно показать (см. [2]), что вполне целый многогранник обладает целой триангуляцией, вписанной в $\mathcal{P}$. Это позволяет иначе доказать Теорему 3 (см. [2]).

Как и в классическом случае, мы из теоремы 3 получаем утверждение про существование неподвижной точки. Приведем ответ в форме Какутани. Пусть F - непустозначное соответствие из X в X (где попрежнему X - множество целых точек некоторого вполне выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$). Потребуем следующе два условия. Первое: образ любой точки $F(x)$ - псевдо-выпуклое подмножество X (то есть $F(x) = co(F(x)) \cap \mathbb{Z}^n$; это аналог выпуклости образа в теореме Какутани). И второе: существует "сохраняющее направления", то есть плавное векторное поле v на X, такое что луч $x + \mathbb{R}_+ v(x)$ пересекает $coF(x)$ для любой точки $x \in X$. Тогда существует неподвижная точка F, то есть $x^* \in X$, такая что $x^* \in F(x^*)$.

В самом деле, очевидно, что поле v направлено внутрь K. Поэтому из теоремы 2 существует $x^* \in X$ с $v(x^*) = 0$. Так как в этом случае луч $x^* + \mathbb{R}_+ v(x^*)$ вырождается в точку x^*, мы заключаем, что $x^* \in coF(x^*)$. А так как точка x^* целая, мы из псевдо-выпуклости $F(x^*)$ заключаем, что $x^* \in F(x^*)$. $\square$

Список литературы

[1] Iimura T. (2003) A discrete fixed point theorem and its applications, *Journal of Mathematical Economics* 39, 725-742

[2] Iimura T., Murota K. and Tamura A. (2004) Discrete fixed point theorem reconsidered. Preprint METR 2004-09, Tokyo, Japan

[3] Eilenberg S., Montgomery D. (1946) Fixed point theorems for multivalued transformations, *Amer. J. Math.* 68, 214-222

Центральный Экономико-Математический Институт Российской Академии Наук, Москва

Данилов Владимир Иванович, 117437, Москва, ул. Профсоюзная 116-3-63, тел. 3308486 (дом), 3326606 (служ), e-mail: vdanilov43@mail.ru

Кошевой Глеб Алексеевич, 109436, Москва, ул. Краснодонская 1-1–80, тел. 3527707 (дом), 3326606 (служ)