ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2015, том 51, № 4, с.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

# ЗАМЕНИМОСТЬ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ ТОВАРОВ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

**© 2015 г. В.И. Данилов**

*(Москва)*

В работе рассматривается задача характеризации функций полезности, порождающих валово-заменимый спрос. Пусть $f$ – вогнутая функция полезности некоторого потребителя, выраженная в денежной форме. Это значит, что его спрос при цене p формируется как задача максимизации чистой полезности $f(x)-p(x)$. Такая функция называется ВЗ-функцией, если увеличение цены любого товара приводит к повышению спроса на оставшиеся товары. В работе доказано, что $f$ является ВЗ-функцией тогда и только тогда: когда двойственная по Фенхелю функция $f^*$ *супермодулярна.* Как следствие устанавливается субмодулярность любой ВЗ-функции. В работе устанавливается также правило вычисления производной для свертки нескольких вогнутых функций.

**Ключевые слова:** вогнутые функции, супермодулярность, субмодулярность, сопряжение по Фенхелю.

**Классификация JEL:** C61, D110.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие заменяемости и дополнительности товаров характеризует зависимость спроса на товары от изменения цен. Представим, что цена некоторого товара $i$ повысилась, тогда как цены остальных товаров остались неизменными. Естественно ожидать, что спрос на товар $i$ уменьшится. Но что будет со спросом на другие товары? Интуитивно ясно, что это зависит от того, является товар $j$ заменителем (как лимонад и кока-кола) или дополнителем (как автомобили и бензин) товара $i$. В случае замещения спрос на товар $j$ увеличится, компенсируя отчасти уменьшение потребления товара $i$; в случае дополнения – наоборот.

Далее рассмотрим ограничительный случай, когда спрос задается максимизацией функции полезности $f$, квазилинейной по деньгам. Иначе говоря, мы пренебрегаем эффектом дохода. Это оправдано, если изменения цен сравнительно небольшие, а рассматриваемые товары составляют небольшую группу среди всех товаров. В этом случае спрос при ценах $p$ – это решение задачи максимизации чистой полезности $f - p$.

Наличие зависимостей между товарами типа заменимости или дополнительности часто позволяет упростить анализ. Дело в том, что эти зависимости сохраняются при агрегировании. В случае однозначного спроса (что подразумевает строгую вогнутость и гладкость $f$) следствия заменимости были изучены в работах Д.Р. Хикса, М. Моришимы, Х. Никайдо (Никайдо, 1972) и др. Случай многозначного спроса обсуждается в обзоре (Полтерович, Спивак, 1982). Такой спрос возникает и при исследовании неделимых товаров, см. (Danilov, Koshevoy, 2003; Gul, 1999; Kelso, Crawford, 1982). Однако как устроены функции полезности, которые порождают, скажем, заменимый спрос? Много ли таких функций? Какие операции они выдерживают? К сожалению, мы имеем очень мало информации о том, какие требования к целевым функциям обеспечивают выполнение тех или иных условий, налагаемых на избыточный спрос (Полтерович, Спивак, 1982).

Эти вопросы рассматривались в работе (Данилов, Ланг, 2001), где был найден принципиальный ответ: функция полезности $f$ порождает заменимый спрос тогда и только тогда, когда сопряженная к ней функция $f^*$ супермодулярна. Такая характеризация полезна тем, что множество вогнутых супермодулярных функций является выпуклым замкнутым конусом в пространстве всех функций. Исходные функции полезности этим свойством не обладают. Правда, полученный в (Данилов, Ланг, 2001) результат был доказан только для кусочно-линейных функций. В настоящей работе мы снимаем это ограничение и доказываем теорему характеризации для произвольных вогнутых функций. В частности, это позволяет показать, что функции полезности, порождающие заменимый (или дополняемый) спрос, аппроксимируются гладкими и строго вогнутыми функциями, обладающими теми же свойствами. Это означает, что классическое ограничение однозначным спросом не является серьезным.

Кроме того, теперь мы не требуем, чтобы все товары были заменимыми или дополняемыми, а допускаем произвольные паттерны зависимостей между товарами. Иначе говоря, некоторые пары товаров могут заменять друг друга, тогда как другие – дополнять друг друга.

Также в работе получено правило вычисления производных свертки вогнутых функций.

## 2. ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Пусть $I$ – конечное множество видов товаров. Товарный набор указывает, сколько единиц каждого вида товаров содержится в нем. Товарные наборы (далее – товар) мы понимаем как формальные суммы вида $x = \sum_{i \in I} x_i \otimes i$, где $x_i \in \mathbb{R}$. Вещественное число $x_i$ указывает количество товара вида $i$ в товарном наборе $x$. Как правило, мы будем рассматривать неотрицательные товарные наборы, т.е. $\forall x_i \geq 0$. $\mathbb{R}_+ \otimes I$ обозначает ортант таких неотрицательных товарных наборов.

Предполагается, что на этом ортанте задана функция $f$, которая понимается как функция полезности некого потребителя. Число $f(x)$ обозначает выраженную в деньгах полезность этого потребителя от потребления товарного набора $x$. Деньги выступают здесь как агрегат остальных товаров.

Считается, что потребитель находится на рынке, на котором действуют цены $p$. В данном случае цена – это либо функция $p: I \to \mathbb{R}$, либо линейный функционал на пространстве $\mathbb{R} \otimes I$ товарных наборов. При этом $p(i)$ интерпретируется как цена единицы товара вида $i$; соответственно $p(x) = \sum_i p(i) x_i$. Множество всех цен образует векторное пространство $\mathbb{R}^I$. Как правило цены неотрицательные, хотя иногда будет удобно не накладывать это условие.

*Чистой полезностью* товарного набора $x$ при цене $p$ (для потребителя с функцией полезности $f$) называется число $f(x) - p(x)$. Естественно считать, что потребитель выбирает такой товарный набор, который максимизирует чистую полезность. Иначе говоря, спрос потребителя при цене $p$ – это множество $D(p) = \text{Argmax}(f - p)$, которое мы обозначаем $\partial^* f(p)$. В принципе это множество может оказаться пустым, что происходит по одной из двух (близких) причин. Первая – чистая полезность может неограниченно возрастать; вторая – она ограничена, но не достигает максимума. Исходя из содержательных соображений далее мы предполагаем, что функция полезности $f$ вогнута (т.е. выпукла вверх) и непрерывна (в силу вогнутости непрерывность может нарушаться только при подходе к границе ортанта). Естественно считать, что $f$ монотонна и что цены $p$ на рынке неотрицательны. Правда, если цены близки к нулю, спрос все еще может быть неограниченно большим. Чтобы исключить такие неприятные явления (имеющие скорее формальный, а не содержательный характер), наложим на функции полезности $f$ два дополнительных технических условия: насыщаемость и липшицевость.

*Насыщаемость.* Существует большая константа $K$, такая, что $f(x) = f(x \wedge K)$. Здесь и далее "$\wedge$" обозначает покоординатный минимум, так что $(x \wedge K)_i = \min(x_i, K)$. Смысл этого условия заключается в том, что когда потребитель потребляет $K$ единиц некоторого товара $i$, дальнейшее увеличение этого товара не приводит к росту полезности. Заметим, что вогнутость и насыщаемость функции $f$ влекут монотонность.

*Липшицевость.* Существует большая константа $L$, такая, что функция $f$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L$: $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$. Здесь $|\bullet|$ обозначает произвольную норму в конечномерном пространстве $\mathbb{R}\otimes I$ (например, сумму модулей разности координат). Смысл этого условия состоит в том, что при достаточно высокой цене товара $i$ данный товар просто не покупается (потребление его становится невыгодным).

Множество функций на ортанте $\mathbb{R}_+\otimes I$, которые выпуклы и удовлетворяют насыщаемости и липшицевости, обозначим **CSL**.

Наряду с функцией полезности $f$ удобно будет рассматривать дуальную (в каком-то смысле) функцию $f^*$ от переменных $p$ (неотрицательных цен). Она определяется формулой

$$f^*(p)=\inf(p-f)=-\sup(f-p),$$

где $p\in\mathbb{R}_+^I$. Заметим, что в силу предположения о насыщаемости супремумы тут всегда достигаются и конечны, так что $f^*$ определена на неотрицательном ортанте цен $\mathbb{R}_+^I$. Смысл $f^*(p)$ – это (взятая со знаком минус) максимальная чистая полезность при ценах $p$. Минус берется для того, чтобы функция $f^*$ тоже была вогнутой.

Функция $f^*$ называется *сопряженной* (или дуальной) к $f$ по Лежандру–Фенхелю. Главный факт про $f^*$ состоит в том, что $(f^*)^*=f$ (теорема двойственности Фенхеля), так что вся информация про $f$ содержится в $f^*$. И формулировка в терминах $f^*$ часто оказывается более удобной. Отметим, что насыщаемость $f^*$ превращается в липшицевость $f^*$ (с константой $K$), а липшицевость $f$ – в насыщаемость $f^*$ (с константой $L$).

Еще одно важное и полезное при работе с вогнутыми функциями свойство – понятие супердифференциала. Линейная функция $p$ (на пространстве $\mathbb{R}\otimes I$) называется *супердифференциалом* к функции $f$ в точке $x$, если для любой $x'$ из области определения $f$ выполняется

$$f(x')\le f(x)+p(x'-x).$$

Множество супердифференциалов к $f$ в $x$ обозначим через $\partial f(x)$. (Обычно теория развивается для выпуклых функций, и значком $\partial$ обозначают субдифференциалы.) Соотношение $p\in\partial f(x)$ означает, что товар $x$ выбирается (спрашивается) при цене $p$, так что это просто другая запись соотношения $x\in\partial^* f(p)$, или $x\in\partial f^*(p)$.

Известно, что для любого $x$ из внутренности множества определения вогнутой функции $f$ супердифференциал $\partial f(x)$ непуст. В силу условия липшицевости это верно для любых точек $x$ из $\mathbb{R}_+\otimes I$. Данное свойство можно рассматривать как управляемость спроса с помощью цен: любой товарный набор $x$ можно сделать желательным с помощью подходящих цен $p$.

## 3. ОПЕРАЦИИ С ВОГНУТЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Для вогнутых (или выпуклых) функций имеется довольно много операций. Нас будут интересовать в основном две операции – сумма и свертка. С суммой все понятно; сумма двух (или нескольких) функций из **CSL** снова принадлежит **CSL**, так что **CSL** является конусом в пространстве всех функций на $\mathbb{R}_+\otimes I$.

Свертка – менее известная операция, хотя в контексте функций полезности более интересная и адекватная. Пусть $f$ и $g$ – две функции (скажем, на $\mathbb{R}\otimes I$). Их *сверткой* (или супремальной конволюцией) называется функция $f*g$, заданная формулой

$$(f*g)(x)=\sup\big(f(x')+g(x''),\ x'+x''=x\big).$$

Так как в определении участвует супремум по бесконечному множеству, он может обращаться в бесконечность (или не достигаться). Чтобы избежать этого, приходится накладывать дополнительные условия. Будем считать, что $f\in$ **CSL**.

Что касается возмущающей функции $g$, будем придерживаться одной из двух версий. В содержательной версии $g$ тоже принадлежит **CSL**, и тогда супремум всегда (при любом $x$) достигается (и его можно заменить на максимум), так что функция $f*g$ определена и принадлежит **CSL**. Эта функция отражает суммарный спрос двух потребителей с функциями $f$ и $g$.

В технической версии $g$ определена на всем пространстве, вогнута и убывает при $|x|$ стремящемся к $\infty$. (Примером такой функции является квадратичная функция $-A|x|^2$, где $A>0$) Тогда $f*g$ определена при любых $x$, вогнута и принадлежит **CSL** (при ограничении ее на ортант). Основной интерес технической версии относится к сглаживанию. Пусть $g = -A/2\,|x\,|^2$. Тогда (как мы увидим в разд. 8) функция $f * g$ гладкая. Кроме того, при большом $A$ эта возмущенная функция $f * g$ мало отличается от $f$. В самом деле, легко убедиться, что $f \le f * g \le f + L^2/2A$. Первое неравенство вытекает из того, что $g(0) = 0$. Чтобы удостовериться во втором, рассмотрим $\varepsilon$ – вектор, на котором достигается максимум в выражении

$$(f * g)(x) = \max\big(f(x+\varepsilon) + g(-\varepsilon)\big).$$

Тогда $f\,(x + \varepsilon)$ может превосходить $f\,(x)$ не более чем на $L|\varepsilon|$ (где $L$ – константа Липшица), тогда как второй член $\le -A/2\,|\,\varepsilon\,|^2$. Но $La - A/2a^2 \le L^2/2A$ при любых $a$.

Таким образом, $f * g$ является гладкой аппроксимацией функции $f$.

## 4. ПАТТЕРНЫ ЗАВИСИМОСТЕЙ СПРОСА

Ф. Эджворт и В. Парето, а затем Д.Р. Хикс, М. Моришима и Х. Никайдо ввели понятие заменимости и дополнительности товаров. Два товара $i$ и $j$ являются заменителями друг друга, если уменьшение потребления одного из них можно компенсировать увеличением потребления другого. Такое определение является слишком грубым. Более точное определение, данное Д.Р. Хиксом, включает зависимость спроса от цен. Представим, что цена товара $i$ повысилась, тогда как цена $j$ (и остальных товаров) осталась неизменной. Естественно ожидать, что спрос на товар $i$ уменьшится. Это следует из свойства монотонности спроса, порождаемого вогнутой функцией полезности $f$ (Рокафеллар, 1973, теорема 24.8). Пусть $p$ и $p'$ – две цены, $x \in \partial^* f(p)$, $x' \in \partial f^*(p')$. Тогда $(p' - p)(x' - x) \le 0$. В частности, если $p'$ отличается от $p$ только ценой на товар $i$ и $p'(i) > p(i)$, то $x'_i \le x_i$. В принципе последнее неравенство может быть нестрогим, если спрос $x$ попадает на излом функции $f$ и тогда малое повышение цены не скажется на спросе. Но в общем случае следует ожидать строгого понижения спроса на товар $i$.

Что касается спроса на второй товар $j$, то спрос на него может как возрасти, так и уменьшиться (либо в граничной ситуации остаться неизменным). Если спрос на $j$ увеличивается, тогда $j$ является заменителем $i$; если уменьшается – тогда дополнительным к товару $i$. В граничном случае, когда спрос на товар $j$ не меняется, говорят о нейтральности $j$.

На самом деле, говорить о настоящей дополнительности или заменимости можно, если указанные выше зависимости носят устойчивый характер, т.е. не зависят от начального значения цен и от величины изменения цены $p(i)$. Кроме того, интуитивно подразумевается, что эти зависимости носят в каком-то смысле "технологический" характер (как, например, между автомобилями и бензином – настоящая потребность заключается не в автомобилях и бензине, а в желании быстро перемещаться). Поэтому эта зависимость – это не каприз конкретного потребителя, но нечто, свойственное всем. Но это уже относится к вопросам сохранения зависимостей при агрегировании спроса многоих потребителей.

Приведенные описания относятся к случаю, когда спрос однозначен. И хотя переход к многозначности спроса (какой бывает при рассмотрении общих вогнутых функций полезности) не вносит принципиальных обобщений (и читатель мало потеряет, если будет считать функции строго вогнутыми и гладкими), на ответ это не влияет. Поэтому мы не хотим вводить ограничения однозначности как несущественные для данного вопроса. Тем не менее нужно пересмотреть данные нами определения, учитывая многозначность спроса.

Фактически нам надо объяснить, что означает, что подмножество $A$ (некоторого упорядоченного множества с порядком $\le$, например, $\mathbb{R}$) находится правее, чем подмножество $B$.

Скажем, что $B \le A$, если для любого $b \in B$ существует $a \in A$, такое, что $b \le a$. Однако можно дать и зеркальное определение. А именно, что $B \le^\circ A$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$, такое, что $b \le a$.

Поясним это различие на примере интервалов в $\mathbb{R}$. В первом случае $A \ge \max B$. Во втором случае $\min A \ge \min B$. Так что мы получаем два варианта распространения порядка $\le$ на подмножества. Впрочем, как мы увидим, оба варианта приводят к одному и тому же. Поэтому мы ориентируемся далее на первом варианте $\le$.

Перейдем к определению заменимости и дополнительности.

Фиксируем функцию полезности $f$ и далее всюду имеем в виду спрос, порожденный этой функцией. Зададимся ценой $p \geq 0$, товаром $i \in I$ и некоторым числом $\varepsilon \geq 0$.

Скажем, что в ситуации $(p, i, \varepsilon)$ товар $j$ *заменяет* товар $i$ (соответственно *дополняет* товар $i$), если $\partial^* f(p) \leq_j \partial^* f(p + 1_i \varepsilon)$ (соответственно $\partial^* f(p) \geq_j \partial^* f(p + 1_i \varepsilon)$). Здесь $1_i$ обозначает единичный орт в направлении $i$, т.е. $1_i(j) = 1$, если $j = i$, и $= 0$, если $j \neq i$. Поэтому цена $p' = p + \varepsilon 1_i$ отличается от цены $p$ увеличением на $\varepsilon$ цены товара $i$. Наконец, $\leq_j$ означает $\leq$ по координате $j$. (Зеркально можно говорить про свойство заменимости “ $^\circ$ ”, если $\partial^* f(p) \overset{\circ}{\leq}_j \partial^* f(p + 1_i \varepsilon)$.)

Мы дали определение свойства заменимости (дополнительности) применительно к конкретной единичной ситуации $(p, i, \varepsilon)$. Если это свойство выполнено в любой ситуации $(p, i, \varepsilon)$, то $j$ является (глобально) *заменителем* (*дополнителем*) товара $i$. Все эти понятия относятся к конкретной $f$.

Формально данное определение не предполагает, что если $j$ заменяет (дополняет) $i$, то и $i$ заменяет (дополняет) $j$. Тем не менее имеет место следующее предложение.

**Предложение 1.** *Если $j$ заменяет (дополняет) $i$, то $i$ заменяет (дополняет) $j$.*

Доказательство будет дано в разд. 6 как следствие теоремы 2.

Информацию о паттерне зависимостей между товарами можно суммировать в (симметричной) знаковой матрице $S = S(f) = (s_{ij})$ (паттерне), где $s_{ij} = +$, если $i$ и $j$ – заменители, $s_{ij} = –$, если $i$ и $j$ – дополнители друг друга, и $s_{ij}$ не определены в противном случае. В случае если $i$ и $j$ одновременно и дополняют, и заменяют друг друга, мы говорим, что $i$ и $j$ независимы и полагаем $s_{ij} = 0$. Вместо матрицы $S$ можно говорить о неориентированном графе с вершинами в $I$, где ребро соединяет зависимые товары, и на нем ставится метка +, 0 или – в зависимости от того, являются ли эти товары заменимыми, нейтральными или дополнительными товарами.

Наиболее изучен случай, когда все товары замещают друг друга. Менее популярен противоположный случай, когда все товары дополняют друг друга (возможно из-за большей нереалистичности такого предположения). Представляется важным заместимо-дополнительный случай, когда множество товаров $I$ разбито на $k$ групп $I_1, \ldots, I_k$ и товары внутри каждой группы замещают друг друга, а в разных – дополняют.

Отметим одно нетривиальное свойство $S$-функций. Представим, что товары $j$ и $j'$ замещают $i$, и цена на $i$ повысилась (а на остальные товары не изменилась). В случае однозначного спроса очевидно, что потребление и $j$, и $j'$ повысится (быть может, нестрого). Оказывается, что это же верно и в общем случае, т.е. когда спрос неоднозначен.

**Предложение 2.** *Пусть $J \subset I$ состоит из товаров, заменимых с товаром $i$ ($i \notin J$). И пусть $p' = p + \varepsilon 1_i$. Тогда $\partial^* f(p) \geq_J \partial^* f(p')$. ($\leq_J$ означает неравенство для всех координат $j$ из $J$.)*

Можно зафиксировать паттерн $S$ и говорить про функцию полезности $f$, что она $S$-функция, если порождаемый ею спрос согласован с $S$ (т.е. $S \subset S(f)$). Многие простейшие свойства $S$-функций аналогичны свойствам $GS$-функций, приведенных в (Данилов, Ланг, 2001). Важнейшее (хотя и очень простое) свойство состоит в том, что свертка двух (или более) $S$-функций остается $S$-функцией. В экономической теории это означает, что агрегированный спрос потребителей, согласованных с паттерном $S$, также согласован с этим паттерном. А вот сумма двух $S$-функций может и не быть $S$-функцией (примеры приведены в (Данилов, Ланг, 2001)). Это сильно затрудняет понимание и конструирование таких функций. Наш менталитет ориентирован на линейность, и одна из главных целей этой работы – вернуть через двойственность эту аддитивность.

## 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ $S$-ФУНКЦИЙ

**Пример 1.** Начнем с простого примера, когда товары являются абсолютными заменителями друг друга. Тогда полезность $f(x)$ товарного набора $x = \sum x_i \otimes i$ зависит только от $\sum x_i$, $f(x) = \varphi\left(\sum x_i\right)$, где $\varphi$ – вогнутая функция на $\mathbb{R}_+$.

Хотя формальная проверка $GS$ выглядит занудной, интуитивно понятно, что мы имеем случай заменимости товаров. Возьмем, к примеру, случай двух товаров. Посмотрим, как меняется спрос, когда цена $p = (p_1, 1)$, т.е. цена второго товара равна 1, а цена первого меняется от 0 до $\infty$.

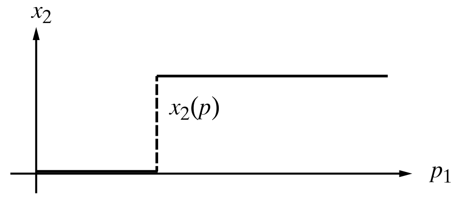


**Рис. 1.** Спрос на второй товар как функция от цены $p_1$ первого товара. Цена второго фиксирована и равна 1

Когда $p_1 < 1$, первый товар дешевле второго. А так как они абсолютно заменимы, покупается только первый товар, так что спрос равен $(x_1(p_1), 0)$. С ростом $p_1$ значение $x_1$ плавно убывает, а $x_2$ не меняется, формально возрастая. В тот момент, когда $p_1$ становится равным 1, спрос резко меняется и становится многозначным. Множество спроса при цене $p = (1, 1)$ имеет вид отрезка, соединяющего две крайние точки: $(x_1(1), (0)$ и $(0, x_2(1))$. Спрос на второй товар реально вырос. Он не определен (многозначен) и заключен между 0 и $x_2(1) = x_1(1)$, но в любам случае это не меньше 0. При последующем увеличении цены $p_1$ первого товара спрос равен $(0, x_2(1))$, т.е. спрос на второй товар фиксируется на значении $x_2(1)$ (рис. 1).

Аналогично строится пример абсолютных дополнителей, когда $f(x) = \varphi(\max(x_i, i \in I))$, а $\varphi$ – вогнутая функций одной переменной.

**Пример 2.** Рассмотрим случай с сепарабельными (вогнутыми) функциями. Функция $f$ называется *сепарабельной*, если она представляет сумму функций, зависящих только от одной из координат, $f(x) = \sum_i \varphi_i(x_i)$. Чтобы быть вогнутой, необходимо, чтобы все $\varphi_i$ были вогнутыми функциями (одной переменной). Так как спрос на товар $i$ зависит только от цены $p(i)$, все товары независимы (т.е. и заменители, и дополнители). Согласно сказанному выше, свертка $S$-функции с сепарабельной остается $S$-функцией. Менее очевидно, что и сумма $S$-функции с сепарабельной будет $S$-функцией.

**Теорема 1.** *Если $f$ – $S$-функция, а $g$ – сепарабельная вогнутая, то $f + g$ тоже $S$-функция.*

В предположении полиэдральности это утверждение было доказано в (Данилов, Ланг, 2001). Доказательство теоремы 1 дается в разд. 8.

Простейшим примером сепарабельной функции служит сумма квадратов $Q(x) = -\sum_i x_i^2$. Прибавляя к $S$-функции $f$ функцию $\varepsilon Q$ с малым $\varepsilon > 0$, получаем близкую к $f$ $S$-функцию $f + \varepsilon Q$. Сворачивая $f$ с функцией $1/\varepsilon Q$, получаем близкую к $f$ гладкую $GS$-функцию. Пользуясь этими соображениями, можно считать, что $S$-функция гладкая и строго вогнутая.

**Пример 3.** Свойство быть $S$-функцией локальное. А локально гладкая функция выглядит (с точностью до линейного члена) как квадратичная. Поэтому полезно понять, какие паттерны имеют квадратичные функции.

Пусть $\mathrm{A} = (a_{ij})$ – симметрическая вещественная матрица (размером $n \times n$, где $n = |I|$). Нас интересует квадратичная функция $Q(x) = 1/2 - \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = (Ax, x)/2$. Когда она является вогнутой и когда и какой $S$-функцией? Ответ на первый вопрос хорошо известен – матрица $A$ должна быть отрицательно полуопределенной. Чтобы не отвлекаться на мелочи, будем считать, что $A$ отрицательно определена (и поэтому $Q$ строго вогнута).

Для такой функции отображение спроса $p \mapsto \partial^* Q(p)$ находится просто. А именно – легко проверить, что максимум функции $Q - p$ достигается в точке $x(p) = A^{-1}p$. Для краткости обозначаем обратную матрицу $A^{-1}$ как $B = (b_{ij})$. Это тоже симметрическая и отрицательно определенная матрица. Предположим, что мы сдвигаемся из точки $p = 0$ (где спрос равен 0) в направлении базисного вектора $1_i$. Спрос в точке $1_i$ равен $\mathrm{B}1_i$, т.е. вектору $B_i = (b_{ji})$, столбцу $i$ матрицы $B$. Конечно, координата $j$ этого вектора – это число $b_{ji} = b_{ij}$. Так что паттерн $S$ – это матрица знаков матрицы $B$, обратной к $A$. Все предельно упрощается при переходе к обратной матрице.

Это подсказывает нам простой способ построения квадратичных $S$-функций. Надо взять отрицательно определенную матрицу $B$, внедиагональные члены которой имеют предписанные паттерном $S$ знаки, и положить $A = B^{-1}$. Нелинейность свойства быть $S$-функцией скрыта именно в образовании обратной матрицы. Что касается условий на $B$, то они вполне линейны. Более точно, множество матриц $B$ с такими условиями образуют круглый выпуклый конус, потому что помимо линейных неравенств надо учесть еще требование отрицательной определенности.

Пример 3 предвосхищает главное утверждение статьи. За счет некоторого нелинейного преобразования (Лежандра–Фенхеля) мы переводим множество $S$-функций в линейный (конический) объект, который уже проще понять и с которым привычнее работать.

## 6. ДУАЛЬНАЯ ФОМУЛИРОВКА

Напомним, что мы ввели для функции полезности $f$ сопряженную функцию $f^*$ (заданную на неотрицательном ортанте цен $\mathbb{R}^I_+$). Так как $\partial^* f(p) = \partial f^*(p)$, то спрос при цене $p$ интерпретируется как супердифференциал $f^*$ в точке $p$. Так как в силу двойственности Фенхеля $(f^*)^* = f$, функция $f^*$ содержит в себе ту же информацию о полезности и спросе, что и $f$. В частности, свойство быть $S$-функцией выражается в терминах $f^*$. И выражается достаточно просто свойствами суб- или супермодулярности. Для этого мы введем следующие понятия.

**Определение.** Пусть $i, j$ – два различных элемента $I$. Функция $g$ (определенная, скажем, на $\mathbb{R}^I_+$) называется *супермодулярной* (относительно $i$ и $j$), если для любых точек $p$ и $q$ из этого ортанта, таких что $p(k) = q(k)$ для любых $k \neq i, j$, выполнено неравенство

$$g(p) + g(q) \leq g(p \wedge q) + g(p \vee q). \tag{1}$$

Здесь $p \wedge q$ обозначает покоординатный минимум векторов $p$ и $q$ ($(p \wedge q)(i) = \min(p(i), q(i))$ для любого $i \in I$), а $p \vee q$ – покоординатный максимум.

Отметим, что если $g$ супермодулярна для любых $i$ и $j$ из $I$, то $g$ супермодулярна в обычном смысле (т.е. что неравенство (1) выполняется для любых $p$ и $q$). Изучению различных свойств супермодулярных функций и их применениям посвящена работа (Topkis, 1998).

Если знак неравенства заменить на противоположный, мы получаем понятие *субмодулярности* (относительно $i$ и $j$). Если неравенство всегда выполняется как равенство, мы говорим о модулярности.

**Определение.** Если $S$ – паттерн зависимостей, функция $g$ называется *$S$-модулярной*, если $g$ супермодулярна относительно $i$ и $j$ с $s(i, j) = +$ и субмодулярна относительно $i$ и $j$ с $s(i, j) = -$.

Для гладкой функции $g$ требование $S$-модулярности сводится к тому, чтобы знаки смешанных производных $\partial^2 g/\partial p_i \partial p_j$ совпадали с $s(i, j)$.

Для нас особенно интересным будет соединение $S$-модулярности с вогнутостью.

**Теорема 2.** *Пусть $f$ – вогнутая функция (из класса* **CSL***) и $S$ – некоторый паттерн. Эквивалентны утверждения:*

*1) $f$ является $S$-функцией;*

*2) сопряженная функция $f^*$ $S$-модулярна.*

Доказательство приведено в разд. 7. А здесь мы отметим несколько частных случаев и следствий.

1. Первое важное применение относится к предложению 1. Мы уже говорили, что совершенно неочевидно, почему из того, что $j$ заменяет $i$, следует, что $i$ заменяет $j$. Это вытекает из теоремы 2, потому что понятие супермодулярности функции $f^*$ относительно $i$ и $j$ совершенно симметрично. Это же верно относительно субмодулярности.

2. Главная польза теоремы 2 состоит в том, что двойственные свойства выглядят гораздо понятнее и привычнее. Например, множество (вогнутых) $S$-модулярных функций замкнуто относительно сложения (образует выпуклый конус), откуда (в силу двойственности) легко следует

уже упоминавшееся утверждение, что множество $S$-функций замкнуто относительно свертки. Впрочем, это несложно установить, не обращаясь к сопряжению.

Стоит отметить, что $S$-модулярность (как и вогнутость) сохраняется при переходе к пределу. Так что это не просто конус, а замкнутый конус. Было бы интересно описать крайние лучи этого конуса. Даже в случае супермодулярности и двух переменных.

$S$-модулярность легче проверять и конструировать. Хотя и нельзя сказать, что эта задача совсем тривиальна. Продемонстрируем это на примере трех квадратичных функций.

Не представляет большого труда взять симметрическую матрицу $B$, внедиагональные члены которой подчинены паттерну $S$. Обращение ее дает квадратичную $S$-функцию. Единственная нетривиальная вещь здесь – позаботиться о вогнутости, т.е. об отрицатеьной определенности матрицы $B$. Интуитивно понятно, что для этого внедиагональные коэффициенты $b_{ij}$ должны быть малы по сравнению с диагональными $b_{ii}$ (точнее, с $-b_{ii}$). В супермодулярном случае (когда все $b_{ij} \geq 0$) этому можно придать точный смысл (см., например, (Данилов, Кошевой, 2013; Murota, 2003). Предположим, что для любого $j = 1, \ldots, n$ выполнены неравенства $\sum_i b_{ij} \leq 0$; тогда матрица $B$ отрицательно полуопределена.

3. Начиная с этого места, мы ограничимся случаем, когда все товары взаимозаменимы, т.е. когда паттерн зависимостей $S$ состоит из одних +. Согласно теореме 2, это означает, что сопряженная функция $f^*$ супермодулярна. В этом случае исходная функция полезности $f$ обладает важным свойством *субмодулярности*, т.е. для любых товарных наборов $x$ и $y$ выполняется неравенство $f(x)+f(y) \geq f(x \wedge y)+f(x \vee y)$. Как и ранее, $x \wedge y$ обозначает покоординатный минимум товарных наборов, а $x \vee y$ – покоординатный максимум. Грубо говоря, эффект от прибавления к товарному набору $z$ $(= x \wedge y)$ дополнительных наборов $\Delta x$ и $\Delta y$ меньше, чем сумма эффектов от прибавления к $z$ наборов $\Delta x$ и $\Delta y$.

**Следствие.** Функция полезности, порождающая заменимый спрос, является субмодулярной.

Доказательство следует из приведенного в (Murota, 2003, theorem 8.1) общего утверждения о том, что функция $f$, сопряженная к супермодуляной функции $f^*$, является субмодулярной.

Там же отмечается, что противоположное утверждение в общем случае неверно. Так что класс функций полезности, порождающих заменимый спрос, значительно у́же, чем класс просто субмодулярных функций. В этом можно убедиться уже на примере квадратичных функций. Однако в случае двух переменных положение проще, и товары 1 и 2 заменимы тогда и только тогда, когда функция полезности $f(x_1, x_2)$ субмодулярна.

4. Приведем пример того, как можно строить супермодулярные и вогнутые функции. Рассмотрим в ортанте $\mathbb{R}^I_+$ целочисленную решетку $R = \mathbb{Z}^I_+$. (Можно рассмотреть решетку с любым шагом, так как это ничего принципиально не меняет. Поэтому мы ограничиваемся решеткой с шагом 1.) Пусть на этой решетке задана функция $F_0$. Функцию $F$ на ортанте $\mathbb{R}^I_+$ мы хотим строить как естественное кусочно-линейное продолжение $F_0$ на весь ортант. В работе (Данилов, Кошевой, 2013) приведены некоторые условия на $F_0$ (так называемые $CC$-функции), которые гарантируют как вогнутость, так и супермодулярность $F$. Любопытно отметить, что эти условия похожи на условия в предыдущем примере с квадратичной функцией – члены, ответственные за вогнутость, должны быть сильнее членов, ответственных за супермодулярность.

5. Легко убедиться, что сопряженная к сепарабельной функции снова сепарабельна. Поэтому теорему 1 можно доказывать в форме: свертка $S$-модулярной (вогнутой) функции с сепарабельной также будет $S$-модулярна.

## 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 И ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2

Доказательства теорем 1 и 2 в основном сводятся к утверждениям про вогнутые функции от одной переменной $t$.

Доказательство теоремы 2. Доказательство утверждения теоремы распадается на ряд более элементарных утверждений, относящихся к фиксированной паре $(i, j)$. А именно, что если

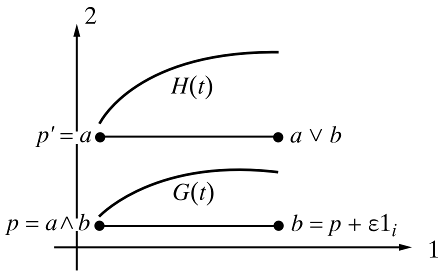


**Рис. 2.** Функция $H$ растет быстрее чем $G$

$j$ – заменитель $i$, то $f^*$ супермодулярна относительно $i$ и $j$ и обратно. А если $j$ – дополнитель $i$, то это эквивалентно субмодулярности $f^*$ относительно $i$ и $j$.

Используя формулу $\partial^* f = \partial f^*$, перепишем спросы при различных ценах $p$ как супердифференциалы сопряженной функции $f^*$. Обозначим ее $F$, т.е. $F = f^*$. Теперь мы имеем дело с одной вогнутой функцией $F$. И от формулировок в терминах супердифференциалов мы хотим перейти к формулировкам в терминах конечных разностей (и наоборот).

Скажем точнее. Допустим, необходимо проверить, что свойство "$j$ заменяет $i$" влечет $ij$-супермодулярность. (Без ограничения общности можно считать, что $i = 2, j = 1$.) Мы утверждаем, что данную задачу можно ограничить на плоскость (с переменными 1 и 2 и фиксированными остальными координатами). Потому что и точки $a$ и $b$ (входяшие в определение 12-супермодулярности), и интересующие нас проекции на первую координату супердифференциалов определяются значениями $F$ на этой плоскости.

Итак, мы ограничиваемся случаем, когда $F$ – функция двух переменных. Мы задаемся двумя точками $a = (a(1), a(2))$ и $b = (b(1),b(2))$ и должны показать, что $F(a) + F(b) \le F(a \wedge b) + F(a \vee b)$. При этом можно считать, что $a$ и $b$ несравнимы и что $a(1) < b(1)$, а $b(2) < a(2)$.

Полагаем $p = a \wedge b = (a(1), b(2))$ и $\varepsilon = a(2) – b(2)$. Тогда $p' = p + \varepsilon l_2 = (a(1), b(2) + \varepsilon) = a$. Точку $b$ мы понимаем как $b + q$, где $q = (b(1) - a(1), 0)$. В этом случае $a \vee b = p' + q$ и возникают две (вогнутые) функции от одной переменной $t$ ($0 \le t \le 1$): "нижняя" – $G(t) = F(p + tq)$ и "верхняя" – $H(t) = F(p' + tq)$ (рис. 2).

По условию, что товар $j = 1$ замещает товар $i = 2$, имеем неравенство $\partial G(t) \le \partial H(t)$. Оно получается после применения определения к точке $p + tq$ и сдвинутой точке $p + tq + \varepsilon 1_2 = p' + tq$. Так например, $\partial G(t)$ – это проекция на первую координату $\partial F(p + tq)$ и аналогично для $\partial H$.

По условию "производная" функции $G$ меньше или равна "производной" функции $H$. Нужно показать, что для приращений выполняется неравенство $G(1) - G(0) \le H(1) - H(0)$. Если бы $G$ и $H$ были гладкими функциями, это было бы тривиальным следствием теории производных. Понятно, что это верно и для вогнутых функций, где производные заменены супердифференциалами.

Согласно (Рокафеллар, 1973, § 24), имеем $\partial G(t) \le \partial H(t)$ для любого $t$. Согласно определению "$\le$" для подмножеств в $\mathbb{R}$, переписываем это неравенство как $\max(\partial G(t)) \le \max(\partial H(t))$. А максимум $\partial G(t)$ трактуется как левая производная $G$ в точке $t$, $G'_l(t)$; аналогично для $H$. Поэтому мы имеем неравенства для левых производных $G'_l(t) \le H'_l(t)$ для всех $t$. А это влечет неравенство для приращений: $G(1) - G(0) \le H(1) - H(0)$.

А если вместо "$\le$" мы будем использовать зеркальное отношение "$\le^\circ$", то, аппелируя к правым производным $G$ и $H$, придем к тому же заключению.

В обратную сторону доказательство столь же просто. Если $F$ супермодулярна (как функция двух переменных), то в введенных выше обозначениях имеем $G(t') - G(t) \le H(t') - H(t)$ для любых $t \le t'$. (В таком случае говорят, что *$H$ растет быстрее, чем $G$*.) Откуда немедленно получаем соответствующие неравенства для левых и правых производных $G$ и $H$. Существование этих производных гарантировано вогнутостью функций $G$ и $H$.

В случае субмодулярности рассуждения такие же, но с заменой всех неравенств на противоположные. Теорема 2 доказана.

Читателю рекомендуется продумать эти расуждения при упрощающем предположении, что функция $F$ (от двух переменных) гладкая. По существу оно сводится к проверке того, что супермодулярность $F$ эквивалентна неотрицательности смешанной производной $\partial^2 F / \partial p_1 \partial p_2$.

Доказательство предложения 2. Предположим, что $i = 1$ заменимо не только с одним товаром $j$, но со всеми $j$ из некоторого подмножества $J$. Тогда функция $F$ является $1j$-супермодулярной для любого $j$ из $J$. Ограничиваясь переменными из $\{1\} \cup J$, можно считать, что $F$ просто супермодулярна по всем переменным. Рассуждая как при доказательстве теоремы 2, получаем, что производная $F$ по любому направлению $q$ ($q \geq 0$ и $q(1) = 0$) в точке $p$ меньше или равна производной $F$ по направлению $q$ в точке $p' = p + \varepsilon 1_1$.

Отсюда следует, что $\partial F(p) \geq_j \partial F(p')$. В самом деле, нужно проверить, что для любого $x \in \partial F(p)$ существует $x' \in \partial F(p')$, такое что $x \leq_J x'$. Предположим, что это не так. Это значит, что множество $\partial F(p')$ не пересекается с множеством $x + (\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^J_+)$. Но $\partial F(p')$ – выпуклый компакт. Поэтому эти два множества разделяются некоторым линейным функционалом $q$, $q(\partial F(p')) < q(x + (\mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^J_+))$. Тогда $q \geq 0$, $q(1) = 0$ и $q(\partial F(p')) < q(x) \leq q(\partial F(p))$. Но $q(\partial F(p))$ интерпретируется как производная $F$ в направлении $q$ в точке $p$ (Рокафеллар, 1973, теорема 23.4); аналогично $q(\partial F(p'))$. Что противоречит сказанному выше.

## 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Теорема 1 утверждает, что сумма $S$-функции с сепарабельной снова $S$-функция. Конечно, можно считать, что сепарабельная функция $\varphi$ зависит только от одного аргумента, например, от $x_1$. Переходя к сопряженным функциям и пользуясь тем, что при сопряжении сумма переходит в свертку, получаем, что достаточно установить следующее утверждение: пусть $F$ – вогнутая $ij$-супермодулярная ($ij$-субмодулярная) функция, и $\varphi$ – вогнутая функция от переменной $p_1$ (точнее, $\varphi(p) = \varphi(p_1)$, если $p_{-1} = 0$, и равна $-\infty$ в противном случае). Тогда $F * \varphi$ тоже вогнутая и $ij$-супермодулярная ($ij$-субмодулярная). При доказательстве мы ограничимся супермодулярным случаем.

Вогнутость свертки хорошо известна. Поэтому нужно показать $ij$-супермодулярность функции $F * \varphi$. Пользуясь сглаживанием, можем считать, что функция $\varphi$ гладкая и что $F$ зависит только от переменных $p(i)$ и $p(j)$ и может быть от переменной $p(1)$, если $i$ и $j$ отличны от 1. Свертку $F * \varphi$ будем обозначать как $\tilde{F}$. Нужно проверить, что

$$\tilde{F}(x) + \tilde{F}(y) \leq \tilde{F}(x \vee y) + \tilde{F}(x \wedge y). \tag{2}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

**Случай 1.** $i$ и $j$ отличны от 1. Обозначаем их как 2 и 3. Берем две точки: $x = (t, p, q')$ и $y = (t, p', q)$ ($p \leq p', q \leq q'$, так что $x \wedge y = (t, p, q)$, $x \vee y = (t, p', q')$). Теперь надо проверить неравенство (2). Выберем $\varepsilon$ и $\varepsilon'$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{F}(x) + \tilde{F}(t+\varepsilon, p, q') + \varphi(-\varepsilon),$$

$$\tilde{F}(y) + F(t+\varepsilon', p', q) + \varphi(-\varepsilon').$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon \leq \varepsilon'$. Тогда $\tilde{F}(x \wedge y) \geq F(t+\varepsilon, p, q) + \varphi(-\varepsilon)$ и аналогично $\tilde{F}(x \vee y) \geq F(t+\varepsilon', p', q') + \varphi(-\varepsilon')$. Так как

$$\min((t+\varepsilon, p, q'),(t+\varepsilon', p', q)) = (t+\varepsilon, p, q),\ \max(tt+\varepsilon, p, q'),(t+\varepsilon', p', q)) = (t+\varepsilon', p', q'),$$

то супермодулярность $F$ дает неравенства $F(t+\varepsilon, p, q) + F(t+\varepsilon', p', q') \geq F(t+\varepsilon, p, q') + F(t+\varepsilon', p', q)$. Поэтому

$$\tilde{F}(x \wedge y) + \tilde{F}(x \vee y) \geq F(t+\varepsilon, p, q') + F(t+\varepsilon', p', q) + \varphi(-\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon') = \tilde{F}(x) + \tilde{F}(y).$$

Случай 1 проверен. Заметим, что здесь мы не пользовались вогнутостью $F$ и $\varphi$.

**Случай 2:** $F$ зависит от $x_1$ и $x_2$. Снова задаемся точками $x = (p, q')$ и $y = (p', q)$ ($p \leq p'$, $q \leq q'$), и надо проверить неравенство (2).

Функцию $F(\bullet, q)$ обозначим через $G_1(\bullet)$, а $F(\bullet, q')$ – через $G_2(\bullet)$ (аналогично $\tilde{F}(\bullet, q) = H_1(\bullet)$, $\tilde{F}(\bullet, q') = H_2(\bullet)$). Очевидно, что $H_1 = G_1 * \varphi$ (и аналогично $H_2 = G_2 * \varphi$). По условию $G_2$ растет быстрее, чем $G_1$, поэтому мы должны показать, что $H_2$ растет быстрее, чем $H_1$. Как и в предыдущем случае, работаем с функциями одной переменной. Нам нужно показать, что производные у $H_2$ больше (не меньше) производных у $H_1$. Так мы приходим к задаче – как найти производные свертки. Это отдельный и интересный вопрос, который мы сейчас и рассмотрим (в большей, чем непосредственно нужно, общности), а потом вернемся к доказательству.

**Супердифференциал свертки.** Рассмотрим следующую задачу. Даны две вогнутые функции $f$ и $g$, такие, что определена их свертка $f * g$. Как выразить супердифференциал $f * g$ через супердифференциалы функций $f$ и $g$? Как ни странно, в литературе по этому вопросу я не нашел нужного мне утверждения. Все авторы приводят формулы для суммы, для минимума и других менее естественных операций, но только не для свертки. И только в (Обэн, 1988) имеется некая подсказка.

Напомним определение свертки: $(f*g)(x_0) = \max\limits_{y}(f(x_0+y)+(g(-y))$. Для нас важно то, что максимум достигается. Условия этого обсуждались ранее, и мы предполагаем их выполненными.

Приведем ответ в виде утверждения.

**Утверждение.** *Пусть* $\tilde{y}$ *– вектор, на котором достигается этот максимум. Тогда* $\partial(f*g)(x_0) = \partial f(x_0+\tilde{y}) \cap \partial g(-\tilde{y})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V$ – пространство, на котором определены $f$ и $g$; типичная точка $V \times V$ имеет вид $(z, y)$. На произведении $V \times V$ возьмем функцию $F(z, y) = f(z)+\tilde{g}(y)$, где $\tilde{g}(y) = g(-y)$. Ясно, что $F$ – вогнутая функция. Далее, рассмотрим линейное отображение $\pi$: $V \times V \to X$, $(z, y) \mapsto x = z - y$. Тогда $f * g$ получается максимизацией $F$ по слоям $\pi, (f*g)(x) = \max(F|\pi^{-1}(x))$. Линейная функция $p$ на $V$ будет супердифференциалом к $f * g$ в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда ее обратный образ $\pi^*(p)$ является супердифференциалом для $F$ (в некоторой точке $(\tilde{z}, \tilde{y})$ из прообраза $x_0$). Но $\pi^*(p) = (p, -p)$.

При этом имеем $\partial F(\tilde{z}, \tilde{y}) = \partial f(\tilde{z})\partial\tilde{g}(\tilde{y})$. Таким образом, мы получаем, что $p \in \partial(f*g)(x_0)$ тогда и только тогда, когда $p \in \partial f(\tilde{x})$ и $-p \in \partial\tilde{g}(\tilde{y})$. Последняя формула тривиально переписывается как $p \in \partial g(-\tilde{y})$. Учитывая, что $\tilde{z} = x_0+\tilde{y}$, мы доказываем требуемое утверждение.

В частности, если функция $g$ гладкая (и ее супердифференциал $\partial g(y)$ состоит из единственного элемента – производной $g'(y)$), $\partial(f*g)(x_0)$ равно $g'(-\tilde{y})$ (для такого $\tilde{y}$, что $g'(-\tilde{y}) \in \partial f(x_0+\tilde{y})$), т.е. состоит из единственного элемента. А это эквивалентно дифференцируемости $f * g$ в точке $x_0$. Поэтому $f * g$ гладкая. Если мы берем в качестве $g$ квадратичную функцию $-A|x^2|$ (с большим $A$), то получаем близкую к $f$ гладкую функцию $f * g$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. По условию теоремы имеем две функции – $G_1$ и $G_2$ от $t$, – причем $G_2$ растет быстрее $G_1$. С помощью свертки $\varphi$ из них получили $H_1$ и $H_2$. И мы утверждаем, что $H_2$ растет быстрее, чем $H_1$. Разумеется, это будет доказывать теорему. В силу предположения о гладкости $\varphi$ функции $H_1$ и $H_2$ тоже гладкие. И нам нужно показать, что $H_1'(t) \le H_2'(t)$ во всех точках $t$ нашего интервала (рис. 3).

Предположим, что это не так и что производная $H_2$ в некоторой точке $t$ (которую мы можем считать равной 0) меньше, чем $H_1'(0)$. Пусть $\varepsilon_1$ – как выше для $H_1$ (т.е. $H_1(0) = G_1(\varepsilon_1)+\varphi(-\varepsilon_1)$), а $\varepsilon_2$ – для $H_2$. Тогда $H_1'(0) = \varphi'(-\varepsilon_1)$; $H_2'(0) = \varphi'(-\varepsilon_2)$. Значит, $\varphi'(-\varepsilon_1) > \varphi'(-\varepsilon_2)$. Отсюда из монотонности производной вогнутой функции $\varphi$ заключаем, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Однако $\varphi'(-\varepsilon_1) \in \partial G_1(\varepsilon_1)$ и аналогично для $\varphi'(-\varepsilon_2) \in \partial G_2(\varepsilon_2)$. Супердифференциал (как множество) $\partial G_1(\varepsilon)$ убывает по $\varepsilon$, так что интервал $\partial G_1(\varepsilon_2)$ расположен правее, чем интервал $\partial G_1(\varepsilon_1)$ (точнее, минимум первого $\ge$ максимум второго). А в силу того, что $G_2$ растет быстрее, чем $G_1$, интервал $\partial G_2(\varepsilon_1)$ расположен правее, чем $\partial G_1(\varepsilon_1)$ (в том смысле, что его минимум правее). Значит, для лежащих в этих интервалах точек $\varphi'(-\varepsilon_2)$ и $\varphi'(-\varepsilon_1)$ выполнено неравенство $\varphi'(-\varepsilon_1) \le \varphi'(-\varepsilon_2)$, что противоречит сделанному выше предположению, что $\varphi'(-\varepsilon_1) \le \varphi'(-\varepsilon_2)$. Это завершает доказательство теоремы 1.

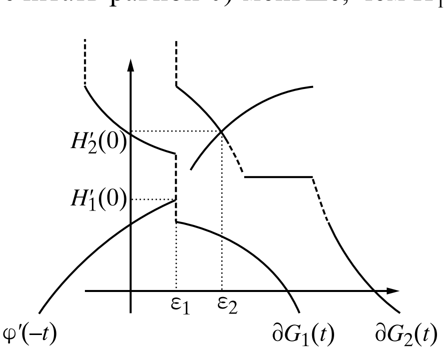


**Рис. 3.** Случай общего положения. Полная монотонная кривая $\partial G_2$ проходит выше, чем $\partial G_1$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**Данилов В.И., Ланг К.** (2001). Кусочно-линейные функции полезности, удовлетворяющие условию валовой заменимости // *Экономика и математические методы*. Т. 37. Вып. 4. С. 45–50.

**Данилов В.И., Кошевой Г.А., Ланг К.** (2013). Равновесия на рынке неделимых товаров // *Журнал Новой экономической ассоциации.* Т. 2(18). С. 10–34.

**Никайдо Х.** (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

**Обэн Ж.-П.** (1988). Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир.

**Полтерович В.М., Спивак В.А.** (1982). Отображения с валовой заменимостью в теории экономического равновесия. В кн. "*Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*". Т. 19. М.: ВИНИТИ. С. 111–154.

**Рокафеллар Р.** (1973). Выпуклый анализ. М.: Мир.

**Danilov V.I., Koshevoy G.A., Lang C.** (2003). Gross Substitution, Discrete Convexity, and Submodularity // *Discrete Applied Mathematics.* Vol. 131. P. 283–298.

**Gul F., Stacchetti E.** (1999). Walrasian Equilibrium with Gross Substitutes // *Journal of Economic Theory.* Vol. 87(1). P. 95–124.

**Kelso A., Crawford V.** (1982). Job Matching, Coalition Formation and Gross Substitutes // *Econometrica.* Vol. 50. P. 1483–1504.

**Murota K.** (2003). Discrete Convex Analysis. Philadelphia: SIAM.

**Topkis D.M.** (1998). Supermodularity and Complementarity. Princeton: Princeton Univ. Press.

Поступила в редакцию
27.01.2015 г.

# Substitution and Complementarity of Goods in Terms of Utility Function

**V.I. Danilov**

In the paper we consider a problem of characterization of utility functions which generate gross substitute demand. Let $f$ be a concave function; we consider it as a utility function of some comsumer expressed in terms of money. This means that demand (at a price $p$) is formed as solunion of the problem $f(x)–p(x) \to \max$. Such a function is a GS-function if an increasing of price of any good yields increasing of demand of other goods. We prove that $f$ is a GS-function if and only if the conjugate function $f^*$ is supermodular. As a corollary we prove that any GS-function is submodular. We provide also a rule for calculation of the derivative of the convolution of several concave functions.

**Keywords:** concave functions, supermodularity, submodularity, Fenchel duality.

**JEL Classification:** C61, D110.