В.И. Данилов
ЦЭМИ РАН, Москва

Теория полезности общих лотерей

Аннотация. Обобщая понятия рулеточных лотерей, тотализаторов и квантовых лотерей, в работе вводится максимально общее понятие лотереи. Оно опирается на теорию упорядоченных векторных пространств. При подходящих условиях на предпочтения между лотереями (условия фон Неймана, Сэвиджа, Ауманна и Энскомба) устанавливается формула для полезности лотерей. Ее ингредиенты – функция полезности для призов и функционал веры, задающий вероятности событий. Во второй части работы обсуждается вопрос о том, как меняется вера при получении дополнительной информации. В предположении, что наше упорядоченное векторное пространство является вещественной частью C^*-алгебры, дается формула для обновления веры, обобщающая правило Байеса и проекционный постулат Неймана-Людерса.

Ключевые слова: *функция полезности, вероятность, измерение, упорядоченное векторное пространство, обновление, C^*-алгебра.*

JEL classification: C44, D81, D84.

1. Введение

Цель настоящей работы – предложить достаточно общее понятие лотереи и при определенных условиях установить формулу для расчета полезности такой лотереи. Для этого надо уточнить понятие лотереи.

Лотерея – это случайный, или, точнее, условный приз. Приз – это то, что имеет какую-то ценность в глазах лица, принимающего решение (ЛПР). Множество призов обозначается X.

Больше внимания следует уделить пониманию условности. Имеется в виду, что ЛПР получает приз в случае наступления некоторого события (или выполнения некоторого условия). В момент приобретения или сравнения лотерей это событие неизвестно. Но в какой-то последующий момент с помощью определенного устройства производится измерение некоторой системы, в результате которого на табло высвечивается полученный исход (результат измерения). В зависимости от этого исхода выдается приз. Согласно (Anscomb, Aumann, 1963) лотерея – это устройство, которое определяет, какой приз вы получаете, на основании наблюдения, которое указывает, какое событие (из множества взаимоисключающих и исчерпывающих событий) имело место. Если I – множество потенциальных исходов этого измерения, то выдача приза описывается некоторым заданным заранее отображением $f : I \to X$.

Хотя предлагаемая теория описывает общую ситуацию, стоит пояснить сказанное на примере трех важных частных случаев, из которых вырос этот общий случай.

Первый, самый простой, относится к обычным лотереям. Тут под измерительным устройством можно понимать любое устройство,

[1] Intergovernmental Panel on Climate Change (http://www.ipcc.ch/).

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

генерирующее исходы с заданными вероятностями или частотами. Это всевозможные рулетки, лототроны, бросание костей или монет. Теория полезности такого рода рулеточных лотерей впервые была построена Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1943 г. (Нейман, Моргенштерн, 1970).

Второй случай, когда вероятности событий объективно не заданы, был инициирован в (Savage, 1954) и существенно упрощен в (Anscomb, Aumann, 1963). Впрочем, термин «лотерея» там даже не использовался; Л. Сэвидж говорил о действиях, а Ф.Дж. Энскомб и Р.Дж. Ауманн предпочитали говорить о лошадиных скачках, а при переводе книги (Фишберн, 1978) был взят термин «тотализатор». Измерение здесь – скачки, исход – победившая лошадь.

Эти два случая можно назвать классическими не только из уважения к их возрасту, но и как противопоставление квантовому случаю. Последний сформировался сравнительно недавно (см. (Wallace, 2003; Pitowski, 2003), особенно (Gyntelberg, Hansen, 2004, 2012; Danilov, Lambert-Mogiliansky, 2010; Danilov et al., 2016)). Здесь измерение производится над некоторой квантовой системой (например, измерение спина). Специфика квантового случая состоит в том, что разные лотереи могут требовать разного типа измерительных устройств. И дело даже не в различии типов, а в том, что эти измерения могут быть несовместными. То есть их нельзя произвести одновременно: проведение одного измерения так возмущает систему, что переводит ее уже в совершенно иное состояние. Тут уместно привести слова П.С. Фишберна (Фишберн, 1978). Описывая моделирование неопределенности, он отмечает, что обычно в теории предполагается, что «выбираемое действие (читай – измерение. – В.Д.) не влияет на фактически имеющееся состояние». А квантовые измерения и соответствующие лотереи представляют попытку отказа от этого предположения. Переходя к общим лотереям и измерениям, мы моделируем работу обобщенного лототрона сопоставлением каждому исходу $i \in I$ измерительного устройства некоторого символа P_i, отражающего возможность (или вероятность в широком смысле) появления этого исхода i. Главное требование, предъявляемое к системе $(P_i,\ i \in I)$, состоит в том, чтобы эти возможности были взаимоисключающими и в совокупности неизбежными. Иными словами, в результате измерения с достоверностью случится один и только один из исходов, входящих в I.

Далее мы ограничиваемся случаем, когда возможности P_i – это элементы интервала $\mathcal{P} = \{P \in V, 0 \leq P \leq E\}$ в некотором упорядоченном векторном пространстве $(V, \leq)$. Элемент $E \in V$ понимается как достоверное событие, или неизбежность. И условие на семейство $(P_i,\ i \in I)$ выглядит так: $\sum_i P_i$ должна равняться E.

Основной результат статьи (разд. 5) состоит в том, что при определенных условиях (разд. 3–4) полезность лотереи $(P_i \Rightarrow x_i,\ i \in I)$ задается формулой $\sum_i u(x_i)\mu(P_i)$, где, как обычно, u: $X \to \mathbb{R}$ – функ-

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

ция полезности призов, μ — линейный функционал на пространстве V, неотрицательный на конусе неотрицательных элементов и равный 1 в точке E. Этот функционал μ естественно трактовать как веру, или приор, лица, сравнивающего лотереи, в правдоподобность (вероятность) событий из интервала $\mathcal{P}$. В разд. 6 обсуждается вопрос о том, как меняется приор μ, когда ЛПР получает дополнительную информацию о состоянии измеряемой системы.

2. Лотереи

Как уже говорилось выше, лотерея — это соединение призов и условий (событий, возможностей). Призы — это элементы множества X достаточно произвольной природы. Что касается возможностей, мы моделируем их с помощью некоторого упорядоченного векторного пространства. Пусть V – вещественное векторное пространство. Порядковая структура на нем задается с помощью выпуклого конуса $K \subset V$ положительных элементов.

Для элементов v и w пространства V мы полагаем $v \leq w$, если $w - v \in K$. В дальнейшем считаем, что конус K заостренный (т.е. $K \cap (-K) = 0$) и порождает V ($V = K + (-K)$). Подробнее про упорядоченные пространства см. (Акилов, Кутателадзе, 1978).

Чтобы говорить о возможностях, мы фиксируем некоторый положительный элемент E в K, понимаемый как неизбежность. Множество возможностей $\mathcal{P}$ понимается как интервал $\mathcal{P} = \{P \in V, 0 \leq P \leq E\}$; элемент 0 — как невозможность. Так как нас интересуют только элементы из $\mathcal{P}$, будем считать, что конус K натянут на $\mathcal{P}$, $K = \mathbb{R}_+\mathcal{P}$, т.е. для каждого элемента $v \in K$ некоторая ненулевая кратность его $\alpha v \leq E$.

Определение. Пусть фиксированы множество призов X и множество возможностей $\mathcal{P}$ (как интервал в V). *Лотереей* называется конечное семейство $(x_i, P_i; i \in I)$, где $x_i \in X$, $P_i \in \mathcal{P}$ и $\sum_i P_i = E$. Множество таких лотерей — $\mathcal{L}(X, \mathcal{P})$, или $\mathcal{L}(X, V)$.

Семейство $(P_i, i \in I)$ понимается как измерительное устройство с множеством исходов I; элемент P_i указывает возможность, или правдоподобие, наступления исхода i. При наступлении исхода i владелец лотереи получает приз x_i. Более наглядно лотерея выглядит как серия импликаций $(P_i \Rightarrow x_i)$, где i пробегает I. Однако мы предпочитаем использовать другое обозначение — $\sum_i x_i \otimes P_i$. Значок «$\otimes$» не несет какого-то глубокого смысла и может быть заменен на «;». Однако он подразумевает некоторое будущее умножение.

Любой приз x можно рассматривать как вырожденную лотерею $x \otimes E$. Это задает каноническое вложение $X \to \mathcal{L}(X; \mathcal{P})$. Поясним определение на трех приведенных во введении примерах.

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

1. В случае обычных, рулеточных, лотерей $\mathcal{P}$ – это отрезок $[0, 1]$ на прямой $\mathbb{R}$; P_i – обычные вероятности. Множество $\mathcal{L}(X; [0, 1])$ совпадает с множеством $\Delta(X)$ простых вероятностных мер на X.

2. В случае лошадиных скачек изначально задаются некоторым множеством состояний природы S. В терминологии (Savage, 1954) лотерея называется *действием*, а призы – *следствиями*; и если f: $S \to X$ – действие, то ему можно сопоставить лотерею $\sum_s f(s) \otimes s$. Конечно, если S – бесконечное множество, сумма тоже будет бесконечной, поэтому лучше переписать это выражение как $\sum_x x \otimes f^{-1}(x)$ (к вопросу о правомерности такой замены мы еще вернемся). Предполагается, что f принимает конечное число значений. Так что лотерея в смысле Сэвиджа – это выражение вида $\sum_i x_i \otimes S_i$, где S_i – подмножества в S, образующие конечное разбиение S (т.е. $S = \Pi_i S_i$).

Однако удобнее смотреть на это так. Пусть V – пространство функций на S с конечным числом значений; $E = 1_S$ функция, тождественно равная 1; $K \subset V$ – конус неотрицательных функций. Отождествляя подмножество $T \subset S$ с характеристической функцией 1_T, мы представляем лотерею Сэвиджа в форме $\sum_i x_i \otimes 1_{S_i}$, где $\sum_i 1_{S_i} = E$. Теперь мы можем рассматривать и более общие лотереи вида $\sum_i x_i \otimes \varphi_{S_i}$, где φ_i – неотрицательные функции на S, в сумме равные E. (В анализе такие образования часто встречаются и называются *положительными разбиениями единицы.*)

При фиксированном s числа ($\varphi_i(s)$, $i \in I$) задают вероятностную меру на X (вероятность $x \in X$ равна сумме тех $\varphi_i(s)$, для которых $x = x_i$), которую естественно обозначить как $\varphi(s)$. Поэтому лотерею $\sum_i x_i \otimes \varphi_i$ можно рассматривать как отображение из S в множество $\Delta(X)$, $s \to \varphi(s)$, т.е. как лотерею в смысле Энскомба–Ауманна.

3. В квантовом случае мы исходим из некоторого гильбертова пространства H для простоты конечномерного. В качестве V рассмотрим пространство $Herm(H)$ эрмитовых операторов на H, в качестве конуса K – конус неотрицательных эрмитовых операторов; $E = i_{dH}$ – тождественный оператор. Квантовая лотерея – это выражение вида $\sum_i x_i \otimes P_i$, где P_i неотрицательные эрмитовы операторы, в сумме равные E. В квантовой механике такие системы P_i называют POVM (*положительные операторнозначные меры*); они интерпретируются как обобщенные измерения (Холево, 2003). В случае, когда P_i – проекторы, мы приходим к обычным (идеальным) квантовым измерениям.

Вернемся от примеров к общему случаю с упорядоченным пространством $(V, \leq)$. Важное для всего дальнейшего изложения

Журнал НЭА,
№4 (32), 2016,
с. 12–29

наблюдение состоит в том, что множество лотерей $\mathcal{L}(X; V)$ выпукло. Иначе говоря, можно образовывать выпуклые комбинации лотерей (например, когда семейство призов x_i у двух лотерей одно и то же). Пусть $L = \sum_i x_i \otimes P_i$ и $M = \sum_i x_i \otimes Q_i$ – две лотереи (с одинаковыми x_i). И пусть α – число между 0 и 1. Тогда можно образовать новую лотерею $\alpha L + (1-\alpha)M = \sum_i x_i \otimes \left(\alpha P_i + (1-\alpha)Q_i\right)$. (Легко убедиться, что семейство $(\alpha P_i + (1-\alpha)Q_i)$ тоже является положительным разбиением единицы E.) В общем случае мы заменяем лотерею ее каноническим представлением $\sum_x x \otimes P_x$.

В частности, не только множество X чистых призов, но и множество $\Delta(X)$ смешанных призов, или рулеточных лотерей, канонически вкладывается в $\mathcal{L}(X; \mathcal{P})$.

Замечание. У нас выпуклость множества лотерей выглядит просто как тривиальное следствие того, что мы представляем возможности P_i элементами некоторого векторного пространства, т.е. следствием того, что их можно умножать на вещественные числа (меньшие 1). На самом деле, все наоборот. Представление возможностей элементами векторного пространства вызвано тем, что операция смеси двух (или нескольких) лотерей является их фундаментальным (и неизбежным) свойством. В самом деле, пусть у нас есть две лотереи (в любом неформальном смысле). Тогда перед их проведением можно бросить монету и в зависимости от результата разыграть ту или иную лотерею. Конечно, неявно тут спрятана гипотеза о том, что это бросание монеты не влияет на свойства последующих лотерей. Именно желание складывать возможности (чтобы говорить о разбиениях единицы) и умножать их на числа от 0 до 1 и привело нас к использованию упорядоченных векторных пространств для формализации неопределенности.

3. Предпочтения на лотереях

В данном разделе мы проведем характеризацию хороших отношений предпочтений между лотереями. Считается, что ЛПР умеет сравнивать лотереи с точки зрения предпочтительности $\preceq$; $L \preceq L'$ означает, что лотерея L' предпочтительнее (нестрого), чем лотерея L. Это предпочтение субъективное и отражает только вкусы и веры ЛПР, однако это не означает, что оно совершенно произвольно, и в дальнейшем мы наложим некоторые естественные требования (аксиомы) на это отношение.

Аксиома А1. *Бинарное отношение $\preceq$ является слабым порядком на $\mathcal{L}(X, \mathcal{P})$.*

То есть отношение предпочтения $\preceq$ транзитивно и полно. Это требование предполагает высокие интеллектуальные способности

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

ЛПР: оно должно уметь непротиворечиво (т.е. транзитивно) сравнивать любые возможные лотереи. Конечно, это крайняя абсолютизация способностей человека; тем не менее мы, как и почти все исследователи, ее принимаем. Символом «≈» мы будем обозначать эквивалентность в смысле этого предпочтения.

Следующая аксиома заключается в том, что полезность лотереи не зависит от формы ее записи или представления. Введем нужные для этого понятия. Лотереей в *канонической форме* мы называем лотерею вида $\sum_{x\in X} x\otimes P_x$. Здесь неявно предполагается, что все, кроме конечного числа, элементы P_x равны 0. *Канонической формой* лотереи $\sum_i x_i \otimes P_i$ мы называем лотерею $\sum_x x\otimes P_x$, где $P_x = \sum_{i,x_i=x} P_i$.

Аксиома А2. *Любая лотерея эквивалентна (по полезности) своей канонической форме.*

Данная аксиома утверждает, что полезность лотереи зависит только от ее канонической формы. Поясним смысл этого условия на простом примере. Предположим, что наше измерительное устройство имеет два исхода – P и Q, $P + Q = E$. Независимо от исхода ЛПР получает один и тот же приз x. Тогда естественно считать, что для ЛПР такая лотерея по полезности эквивалентна получению приза x. (Хотя, с информационной точки зрения, он может быть заинтересован в проведении измерения, потому что это дает ему дополнительную информацию; подробнее об этом см. разд. 6.)

Аксиома А2 позволяет говорить о выпуклых смесях лотерей. Мы приводим любую лотерею к ее каноническому виду, а в этом случае образование смесей уже определялось. Наличие операции смешивания позволяет наложить условие согласования предпочтений со смешиванием, которое играет важную роль в теориях Неймана–Моргенштерна, Савиджа и др. Эти условия можно накладывать разными способами; так как мы собираемся воспользоваться здесь результатами (Herstain, Milnor, 1954), сформулируем их способом, наиболее близким к их формулировкам.

Аксиома А3 (независимость). *Пусть даны две эквивалентные лотереи* L *и* L' , $L\approx L'$ *и вспомогательная лотерея* M. *Тогда для любого* α, $0\le\alpha\le 1$, *лотерея* $\alpha L + (1-\alpha)M$ *эквивалентна лотерее* $\alpha L' + (1-\alpha)M$.

Это означает, что подмешивание произвольной вспомогательной лотереи M не влияет на взаимоотношение между L и L' (поэтому мы употребили термин «независимость»). Аксиома независимости обычно дополняется требованием непрерывности, или архимедовости, чтобы исключить бесконечно малые полезности.

Аксиома А4 (непрерывность). *Предположим, что последовательность чисел* αn ($\alpha n\in[0,\ 1]$) *сходится к числу* α. *И пусть для лотерей* L, L' *и* M *и любого* n *выполнены соотношения* $\alpha_n L + (1-\alpha_n)L' \preceq M$. *Тогда* $\alpha L + (1-\alpha)L' \preceq M$. *Аналогично для* $M \preceq \alpha_n L + (1-\alpha_n)L'$.

Согласно аксиомам А3 и А4 предпочтение $\preceq$ может быть представлено функцией полезности, аффинной на выпуклом множестве $\mathcal{L}(X, V)$. Чтобы конкретизировать форму этой функции, надо добавить аксиому монотонности.

4. Хорошие предпочтения

Как уже говорилось, нас будут интересовать отношения предпочтения $\preceq$ на множество $\mathcal{L}(X; \mathcal{P})$ лотерей, которые к тому же обладают некоторыми хорошими свойствами, большую часть которых мы уже перечислили в предыдущем разделе.

Начнем с конструкции численной полезности лотерей. Лотерея $\sum_i x_i \otimes P_i$ имеет две стороны – призовую и возможностную, т.е. x_i и P_i. Для задания полезности нам нужно перевести в числовую форму призы с помощью функции полезности u: $X \to \mathbb{R}$, а возможности – в вероятности с помощью линейного функционала μ: $V \to \mathbb{R}$. Чтобы из P_i получались вероятности, нужно наложить на μ два условия:

1) μ неотрицательно на конусе K (и тогда $\mu(P_i) \geq 0$);

2) $\mu(E) = 1$ (и тогда $\sum_i \mu(P_i) = 1$).

Задавшись такими u и μ, мы определяем *полезность* $U = U(u, \mu)$ лотереи $L = \sum_i x_i \otimes P_i$:

$$U(L) = \sum_i u(x_i)\mu(P_i). \tag{1}$$

Соответственно, предпочтение $\preceq = \preceq_{u,\mu}$ задается формулой $L \preceq L'$, если $U(L) \leq U(L')$. Наша задача – выделить некоторые свойства этого отношения $\preceq$, а затем показать, что эти свойства в точности характеризуют предпочтения, построенные выше.

Первое очевидное свойство: предпочтение $\preceq$ является слабым порядком, т.е. выполняется аксиома А1. Столь же очевидно, что предпочтение (как и полезность) не зависят от представления лотереи (аксиома А2). Это вытекает из линейности μ; из этой же линейности следует выполнение аксиом А3 и А4.

Формулировка свойства *монотонности* требует некоторых пояснений. Смысл его в том, что замена приза лучшим увеличивает полезность лотереи. Фактически эта аксиома присутствует уже у Л. Сэвиджа под названием «принцип надежной вещи». Однако такая призовая формулировка свойства монотонности довольно слаба, и для получения более сильных заключений надо использовать рулеточную формулировку.

Мы определяли лотерею как выражение $\sum_i x_i \otimes P_i$, где x_i были элементами множества X. Однако можно было бы считать их обыч-

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

ными, рулеточными, лотереями. При наступлении исхода i обладатель лотереи получает не натуральный приз x_i, а новую лотерею l_i. Формально речь идет о рассмотрении лотерей со значениями в множестве $\Delta(X)$, т.е. о двухэтажных лотереях. Однако такую двухэтажную лотерею легко *редуцировать* к одноэтажной, так как существует естественное отображение $\mathcal{L}(\Delta(X); V) \to \mathcal{L}(X; V)$. Оно устроено так. Пусть дана двухэтажная лотерея $\sum_i l_i \otimes P_i$, где $l_i \in \Delta(X)$, и $l_i = \sum_x x \otimes \sum_i p_{ix}$ (при фиксированном i числа p_{ix} задают уже обычные вероятности, т.е. неотрицательные, и $\sum_x p_{ix} = 1$ для любого i). Соответствующая редуцированная одноэтажная лотерея определяется как $\sum_x x \otimes \left(\sum_i p_{ix} P_i\right)$. Легко проверить, пользуясь дистрибутивностью, что это действительно лотерея, т.е. элементы $P_x := \sum_i p_{ix} P_i$ принадлежат конусу K и в сумме равны E. В духе аксиомы А2 естественно считать, что двухэтажная форма это просто другое, более развернутое представление той же лотереи[1].

Имея функцию полезности u и отображение правдоподобия μ: V $\to$ $\mathbb{R}$, мы можем приписать полезность не только одноэтажной лотерее, но и двухэтажной, причем полезность двухэтажной лотереи и ее редукции совпадают. При этом мы оцениваем рулеточную лотерею $l = \sum_i x_i \otimes Pi$ как ожидаемую полезность, т.е. $\tilde{u}(l) = \sum_i u(x_i) p_i$. Если в лотерее $\sum_i l_i \otimes$Pi заменить li на лучшие лотереи l_i', полезность лотереи $\sum_i l_i' \otimes P_i$ будет не меньше, чем исходной. Это и есть свойство (сильной, рулеточной) монотонности, которое мы имели в виду.

Данное свойство можно сформулировать, не обращаясь к конкретной форме (связанной с u и μ), т.е. пользуясь только отношением $\preceq$. Для этого мы вспомним, что множество $\Delta(X)$ обычных лотерей канонически вкладывается в $\mathcal{L}(X; V)$; рулеточная лотерея $l = \sum_i x_i \otimes p_i$ переходит в $\sum_i x_i \otimes p_i E$. Поэтому можно ограничить предпочтение $\preceq$ с $\mathcal{L}(X; V)$ на $\Delta(X)$ и обозначить его как $^\circ\Delta$. Теперь мы можем дать формулировку аксиомы монотонности в терминах только $\preceq$.

Аксиома А5 (монотонность). *Пусть лотерея L представлена двухэтажной лотереей* $\sum_i l_i \otimes P_i$, *а лотерея* L' *— лотереей* $\sum_i l_i' \otimes P_i$. *Предположим, что* $l_i \preceq_\Delta l_i'$ *для всех* $i \in I$. *Тогда* $L \preceq L'$.

Из сказанного следует, что предпочтение $\preceq$, построенное по u и μ, удовлетворяет аксиоме А5 (как и предыдущим аксиомам А1–А4). В следующем разделе мы покажем, что верно и обратное утверждение.

5. Характеризация

Строим $\mathcal{P}$ по тройке (V, K, E). Отношение предпочтения $\preceq$ на $\mathcal{L}(X; \mathcal{P})$ называется *хорошим*, если оно удовлетворяет свойствам аксиом

[1] Дотошный читатель может справедливо сказать, что лотерея лотерей это не совсем исходная одноэтапная ло-терея, что приведенная выше операция – это просто редукция двухступенчатой лотереи к одноступенчатой. Отказ от такой редукции в постановке рулеточных лотерей был исследован в работе (Segal, 1990).

A1–A5. Нам необходимо доказать теорему о характеризации (или представлении) хороших предпочтений.

Теорема. *Пусть* $\preceq$ *– хорошее предпочтение на множестве* $\mathcal{L}(X; \mathcal{P})$. *Тогда существует функция полезности* u: $X \to \mathbb{R}$ *и положительный нормированный линейный функционал* μ: $V \to \mathbb{R}$, *такие что* $\preceq$ *имеет вид* $\preceq_{(u,\,\mu)}$ (см. (1)). *Функция u определена с точностью до монотонного аффинного преобразования, а функционал* μ *(в случае нетривиального* $\preceq$*) – однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с доказательства полезности. Для простоты будем считать множество X конечным; случай произвольного X получается теми же рассуждениями. Пользуясь индуцированным отношением $\preceq_X$ на X, выберем наилучший и наихудший приз x^* и x_* в X. Из аксиомы монотонности следует, что полезность любой лотереи заключена между x^* и x_*. Отсюда мы делаем вывод, что если x^* и x_* эквивалентны, то эквивалентны и все лотереи. В этом случае утверждение тривиально верно: достаточно взять в качестве u произвольную константу. Поэтому далее будем считать, что x^* строго лучше, чем x_*, $x_* \prec x^*$. Функция полезности U на лотереях строится вполне конструктивно.

Для $\alpha \in [0, 1]$ обозначим через $[\alpha]$ лотерею $\alpha x^* + (1 - \alpha)x_*$. Например, $[1] = x^*$, $[0] = x_*$. Согласно (Herstein, Milnor, 1954, Theorem 6) для любой лотереи L существует единственное число $U(L)$ (между 0 и 1), такое, что лотерея L эквивалентна $[U(L))$, $L \approx (U(L)]$. При этом $L \preceq L'$ тогда и только тогда, когда $U(L) \le U(L')$. Там же показано, что функция U линейна по смесям, т.е. $U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L')$.

В частности, мы получаем полезность каждого приза x, $u(x) = U(x \otimes E)$ или $x \approx (u(x))$. Аналогично, полезность рулеточной лотереи $l = \sum_x x \otimes p_x E$ равна $\sum_x u(x)\, p_x$.

Теперь перейдем к доказательству вероятностной части. Для любого P из $\mathcal{P}$ определим $\mu(P)$ как $U(x^* \otimes P + x_* \otimes (E - P))$. Иначе говоря, выполнено соотношение $x^* \otimes P + x_* \otimes (E-P) \approx [\mu(P)]$. Это задает отображение μ: $\mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$; очевидно, $\mu(E) = 1$. По аксиоме A3 μ согласовано со смесями, т.е., грубо говоря, линейное. Более точно, $\mu(\alpha P) = \alpha\mu(P)$, если $\alpha P \in \mathcal{P}$, и $\mu(P + P') = \mu(P) + \mu(P')$, если $P + P' \in \mathcal{P}$. Установим, к примеру, последнее. Если $P + P' \in \mathcal{P}$, то для $P'' = E - P - P'$ мы имеем $P + P' + P'' = E$. Поэтому можно образовать лотерею $L'' = x^* \otimes P + x_* \otimes P' + x_* \otimes P''$. По определению, ее полезность равна $\mu(P + P')$. Далее, рассмотрим лотереи $L = x^* \otimes P + x_* \otimes (E - P)$ и $L' = x^* \otimes P' + x_* \otimes (E - P')$. И образуем их смесь с половинными весами. Мы получаем лотерею

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

$L/2+L'/2=x^*\otimes(P/2+P'/2)+x_*\otimes(E-P/2-P'/2)$, полезность которой равна $\mu(P)/2+\mu(P')/2$.

Если же рассмотреть смесь с половинными весами L'' и $[0]=x_*\otimes E$, мы получаем ту же лотерею, что и раньше, $L/2+L'/2$. Ее полезность равна половине полезности L'', т.е. $\mu(P+P')/2$, откуда $\mu(P+P')=\mu(P)+\mu(P')$.

Пользуясь тем, что конус K порождается интервалом $\mathcal{P}$, мы единственным способом продолжаем μ с $\mathcal{P}$ на конус K, а затем с K – до линейной функции на всем V, которую мы обозначим той же буквой μ. Так как μ было неотрицательно на $\mathcal{P}$, оно неотрицательно на K. Как уже отмечалось, $\mu(E)=1$.

Наконец, мы утверждаем, что $U(\sum_i x_i\otimes P_i)=\sum_i u(x_i)\mu(P_i)$. Для проверки этого удобно при задании лотереи не писать члены вида $x_*\otimes P$, а записывать только остальные слагаемые. Дело в том, что элемент P, стоящий после $x_*\otimes$, определяется как дополнение к сумме остальных.

Ключевым моментом при доказательстве теоремы является случай лотереи $x\otimes P$; мы утверждаем, что $U(x\otimes P)=u(x)\mu(P)$, а на самом деле мы проверим чуть больше: для любой рулеточной лотереи $l\in\Delta(X)$ выполнено равенство $U(l\otimes P)=u(l)\mu(P)$.

В самом деле, сопоставление рулеточной лотерее l лотереи $l\otimes P$ (а на самом деле $l\otimes P+x_*\otimes(E-P)$) задает вложение симплекса $\Delta(X)$ в $\mathcal{L}(X;\mathcal{P})$ (зависящее от P). Если мы перенесем $\preceq$ на $\Delta(X)$ с помощью этого вложения, мы получим на $\Delta(X)$ некоторое отношение $\preceq_P$. Оно удовлетворяет всем свойствам полезности Неймана–Моргенштерна и поэтому представляется некоторой функцией полезности u_P на X. Решающее замечание состоит в том, что, согласно аксиоме монотонности A5, отношение $\preceq_P$ совпадает с производным отношением $\preceq_\Delta$. Из этой аксиомы следует, что соотношение $l\preceq_\Delta l'$ влечет $l\preceq_P l'$. В частности, эквивалентность в смысле $\preceq_\Delta$ влечет эквивалентность в смысле $\preceq_P$, т.е. функция полезности u_P пропорциональна u. Этот коэффициент пропорциональности легко найти, так как полезность лотереи $x^*\otimes P$ равна $\mu(P)$. Таким образом, $U(l\otimes P)=u(l)\mu(P)$. В частности, для приза x полезность $U(x\otimes P)=u(x)\mu(P)$.

Вернемся к общему случаю лотереи $L=x_1\otimes P_1+\ldots+x_r\otimes P_r$, где $P_1+\ldots+P_r\leq E$. Если образовать смесь $1/(rL)+(1-1/r)[0]$, ее полезность будет равна $U(L)/r$. При этом ту же смесь можно получить

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

как смесь r (с весами $1/r$) лотерей $x_1 \otimes P_1, ..., x_r \otimes P_r$, и полезность ее равна $(U(x_1 \otimes P_1) + ... + U(x_r \otimes P_r))/r$ и, согласно предыдущей формуле, $(u(x_1)\mu(P_1) + ... + u(x_r)\mu(P_r))/r$, т.е.

$$U(\sum_i x_i \otimes P_i) = \sum_i u(x_i)\mu(P_i)).$$ Теорема доказана.

Кроме того, функция u определена с точностью до положительного аффинного преобразования, а линейный функционал $\mu : V \to \mathbb{R}$ определен однозначно.

Замечание. Теорема была доказана при условии монотонности в рулеточном варианте. Можно было бы рассмотреть более слабый, призовой вариант аксиомы A5. В этом случае предыдущие рассуждения фактически доказывают более слабый вариант теоремы о представлении. Искомое представление выглядит так.

Существует функция полезности $u : X \to \mathbb{R}$ и для каждого приза $x \in X$ существует линейный функционал $\mu_x : V \to \mathbb{R}$ (нормированный условием $\mu_x(E) = 1$), причем выполнено условие монотонности: если $x \preceq_X y$ (т.е. $u(x) \le u(y)$), то $u(x)\mu_x \le^* u(y)\mu_y$ (где неравенство $\le^*$ означает дуальное отношение порядка в V^*), и такой, что полезность лотереи $\sum_i x_i \otimes P_i$ задается формулой $U(\sum_i x_i \otimes P_i) = \sum_i u(x_i)\mu_{x_i}(P_i)$.

Интуитивно понятно, что субъективные представления о вероятности μ_x зависят от приза x. Если это не так и они представлены единой мерой μ, мы приходим к старому представлению.

Можно убрать привязку к конкретному множеству призов X. Представим, что в дуальном пространстве V^* задан монотонный непрерывный путь w, идущий из $-\infty$ в $+\infty$. Монотонность пути $w : \mathbb{R} \to V^*$ означает, что $w(t) \le^* w(t')$ для $t \le t'$. Как всегда, $\le^*$ в V^* берется относительно конуса K^*, сопряженного к K. Тогда для любого числа $c \in \mathbb{R}$ гиперплоскость в V^*, заданная уравнением $E(\bullet) = c$, пересекает путь w в единственной точке, например в точке $w(c)$. Иначе говоря, можно считать, что параметризация пути w выбрана так, что $w(t)(E) = t$. В этих терминах функционал $u(x)\mu_x$, связанный с призом x, равен $w(u(x))$.

6. Обновление веры при получении информации

В рамках аксиоматики, рассмотренной выше, полезность лотереи определяется двумя факторами различной природы: полезностью u призов и верой, т.е. представлением о вероятностях событий, реализованным функционалом $\mu \in K^*$ (нормированным условием $\mu(E) = 1$, что не так существенно). Можно задаться вопросом о формировании обеих частей этой полезности, u и μ.

В отношении u трудно что-либо сказать. ЛПР каким-то способом формирует полезность призов. Если множество призов увеличи-

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

вается (за счет добавления одного или нескольких новых призов) или уменьшается, это не сказывается на полезности старых призов.

Совершенно иначе дело обстоит с вероятностной частью. Представления о правдоподобии событий, или возможностей P, формируются на основе какой-то предварительной информации, опыта или модельных представлений. Представим, что перед розыгрышем лотереи ЛПР получает новую информацию о системе, над которой будет производиться измерение. В общем случае эта информация может изменить его веру. Поясним на примерах.

В случае рулеточных лотерей ничего не меняется: вероятности как были экзогенно заданы, так такими и остались. Считается, что вращения рулетки независимы и не влияют на состояния мира.

В случае лошадиных скачек ситуация меняется. Если лошадь A победила на предыдущих скачках, то при повторении скачек скорее всего она снова победит. Поставленный более математически, вопрос звучит так. Пусть действия заданы как функции на множестве состояний S и вера задавалась вероятностной мерой μ на S. И вдруг вы узнаете, что истинное состояние природы находится в некотором подмножестве $T \subset S$. Мера μ должна измениться, потому что теперь состояния, лежащие вне T, имеют уже нулевую вероятность. Новая мера μ' должна быть сосредоточена на T. Но как именно? Ответ на это дается формулой Байеса (обоснованию этой формулы с позиций предпочтительности лотерей посвящена работа (Ghirardato, 2002)).

Вернемся к общим лотереям вида $\sum_i x_i \otimes P_i$. Получение новой информации сводится к тому, что теперь достоверным становится новое E' (тоже лежащее в $\mathcal{P}$). Соответственно старые возможности P_i должны заменится на новые P_i', чтобы сумма $\sum_i P_{i'}$ стала равна E'. Естественно предположить, что имеется линейный оператор *обновления* $\rho : V \to V$, который сохраняет конус K ($\rho(K) \subset K$) и переводит E в E'. В этом случае мы могли бы положить $P_i' = \rho(P_i)$. И для лотереи $L = \sum_i x_i \otimes P_i$ определить новую лотерею $\rho(L) = \sum_i x_i \otimes \rho(P_i)$.

Естественно считать, что новое, измененное под воздействием полученной информации, отношение предпочтения $\preceq'$ (которое можно обозначить как $\preceq^{\rho}$) определяется из соотношения $L \preceq^{\rho} L' \Leftrightarrow \rho(L) \preceq \rho(L')$.

Это нужно рассматривать как *аксиому изменения предпочтения* под воздействием новой информации. Можно проверить, что отношение $\preceq^{\rho}$ снова удовлетворяет аксиомам A1–A5 и поэтому задается (той же) функцией полезности призов u и некоторой новой верой (функционалом) μ'. Впрочем, обновленный функционал μ' можно выписать сразу. Положим $\mu' = \rho^*(\mu)$, где ρ^* – сопряженный к ρ оператор на V^* (т.е. $\rho^*(\mu)(v) = \mu(\rho(v))$ для любого $v \in V$). Теперь проверка сводится к равенству

$$U'(L) = \sum_i u(x_i)\mu'(P_i) = \sum_i u(x_i)\rho^*(\mu)(P_i) = \sum_i u(x_i)\mu(\rho(P_i)) = U(\rho(L)).$$

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

Однако ранее мы налагали на μ условие нормировки: $\mu(E)=1$. Аналогичное условие надо наложить и на μ', и тогда

$$\mu' = \rho^*(\mu)/\rho^*(\mu)(E) = \rho^*(\mu)/\mu(\rho(E)). \tag{2}$$

На самом деле мы должны уметь делать обновление не для одной ситуации получения новой информации, а для любых возможных. То есть задать семейство операторов ρ_P для каждого обновления $P \in \mathcal{P}$, $\rho_P(E) = P$. Оператор ρ_P должен быть в чем-то похожим на умножение на P. То есть V должно быть не просто векторным пространством, но в какой-то степени допускать умножение. Поясним эту идею двумя частными случаями.

1. *Случай классической лотереи.* Пусть (для простоты) S — конечное множество состояний; $V = \mathbb{R}^S$ — пространство всех функций на S; $K = \mathbb{R}^S_+$ — конус положительных функций; $E = 1_S$ — единичная константа. Заметим, что V с поточечным умножением функций является коммутативным кольцом. Произвольное P задается как функция на S со значениеями между 0 и 1. Поэтому будем писать f вместо P и f_i — вместо P_i. Как мы уже объясняли выше, лотерея вида $\sum_i x_i \otimes f_i$ может трактоваться как сопоставление каждому состоянию $s \in S$ рулеточной лотереи $l_s = \sum_i x_i \otimes f_i(s)$. Вероятностная часть полезности задается вероятностной мерой μ на S.

Предположим для начала, что новая информация задается подмножеством $T \subset S$ и означает, что истиное состояние находится в T . Именно эту ситуацию и рассматривал П. Гирардато (в такой ситуации ЛПР становится безразлично, как устроена лотерея вне T, важно только, как устроены ограничения f_i на T).

Обозначим через 1_T характеристическую функцию подмножества T в S и заменим в лотерее все f_i на $1_T f_i$. Тогда лотерея $\rho_T(L) = \sum_i x_i \otimes 1_T f_i$ является хорошим представителем L (хотя формально $\rho_T(L)$ не является лотереей на S); сумма всех $1_F f_i$ равна 1_T, а не 1_S. Но нас это не должно сильно смущать; согласно формуле (2) для обновления новая вера μ' имеет вид $1_T\mu/\mu(T)$, что и утверждает правило Байеса.

Однако такие же аргументы применимы и в более общем случае, когда новая информация задается не подмножеством, а произвольной функцией f, принимающей значения между 0 и 1. В этом случае надо положить ρ_f, равным умножению на f. Формально мы заменяем все функции f_i на ff_i; вера μ заменяется на веру $\mu' = f\mu/\mu(f)$. Обсудим на двух примерах, насколько это разумно. Когда f совпадает с 1_T, мы приходим к частному случаю, исследованному ранее. Рассмотрим теперь ситуацию, когда $f = 1_S/2$. Эта информация вроде ничего нового нам не сообщает. И в самом деле, новая вера, вычисленная по формуле выше, равна $\mu/\left(2\mu(1_S/2)\right) = 2\mu/2) = \mu$, т.е. вера не меняется. Эти два случая должны убедить нас, что предложение достаточно разумно.

2. *Случай квантовых лотерей.* Тут мы начинаем с (конечномерного) гильбертова пространства H . Будем считать, что H — комплекс-

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

ное гильбертово пространство, т.е. снабжено эрмитовым скалярным произведением (g,g), причем $(v,v)\geq 0$. В качестве V мы берем множество $Herm(H)$ эрмитовых операторов, т.е. таких $\mathbb{C}$-линейных операторов (из H в H), что $(Av,w)=(v,Aw)$ (или, что то же самое, число (Av,v) вещественно для любого $v\in H$). Это множество в очевидном смысле является вещественным векторным пространством. В качестве K берем конус $Herm(H)_+$ неотрицательных операторов (т.е. $(Av,v)\geq 0$ для любого $v\in H$); E — это единичный оператор в H. Так что лотерея L — это формальная сумма $\sum_i x_i\otimes P_i$, где P_i — неотрицательные операторы, в сумме равные E.

Чтобы уточнить нашу основную теорему о структуре хороших предпочтений для квантовых лотерей, мы должны разобраться с линейными функционалами на пространстве $Herm(H)$. В функциональном анализе этот вопрос давно разрешен. На множестве всех операторов имеется функционал Tr следа оператора, линейный и обладающий свойством $Tr(AB)=Tr(BA)$. Ограниченный на подпространство $Herm(H)$ эрмитовых оператов, Tr принимает вещественные значения и является $\mathbb{R}$-линейным функционалом. Поэтому для любых двух эрмитовых операторов A и B мы можем определить их скалярное произведение (A,B) как $Tr(AB)$. Очевидно, что оно симметрично. Не так очевидно, что оно принимает вещественные значения (так как оператор AB в общем случае неэрмитов), поэтому мы приведем соответствующее рассуждение. Хотя AB и неэрмитов, легко проверить, что оператор $AB+BA$ — эрмитов, поэтому его след вещественен. Но он же равен удвоенному следу AB. Наконец, легко убедиться, что $(A,A)=Tr(A^2)\geq 0$ и обращается в нуль только при $A=0$.

Таким образом, скалярное произведение $(A,B)=Tr(AB)$ превращает $Herm(H)$ в эвклидово пространство. Откуда ясно, что сопряженное к нему пространство совпадает с ним самим, и любой линейный функционал μ имеет вид (D,g) для некоторого эрмитова оператора D (зависящего от μ). Неотрицательность μ на K означает, что D тоже неотрицательный; равенство 1 на E означает $Tr(D)=1$. Так мы приходим к ожидаемому ответу для полезности квантовой лотереи $\sum_i x_i\otimes P_i$: она равна $\sum_i u(x_i)Tr(P_iD)$ для некоторого эрмитова оператора веры D, обладающего двумя свойствами: $D\geq 0$ и $Tr(D)=1$.

Рассмотрим теперь вопрос обновления этой веры D при получении новой информации. Предположим, становится известным некоторое событие, которое тоже имеет вид положительного оператора P, $0\leq P\leq E$. Согласно сказанному выше для классического случая, надо было бы все события-операторы P_i заменить на PP_i. Эта естественная идея встречает препятствие, состоящее в том, что оператор PP_i в общем случае неэрмитов. К счастью, имеется неплохой выход из этой ситуации. Хорошо известно, что каждый положительный оператор P имеет единственной положительный квадратный корень $Q=P^{1/2}$. И вместо того чтобы умножать (слева) на P, можно

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

умножить слева и справа на Q. В результате снова получается эрмитов оператор. Так что $\rho(A) = QAQ$ вполне годится на роль ограничивающего отображения, тем более что ρ переводит положительные операторы в положительные и $\rho(E) = QEQ = QQ = P$. Это позволяет определить ограничение $\rho(L)$ лотереи L при условии P как лотерею $\sum_i x_i \otimes QP_iQ$. В соответствии с установленным выше в этом случае вера, представленная оператором D, изменяется (обновляется) по правилу $D' = QDQ / Tr(QDQ)$, которое можно рассматривать как квантовое правило Байеса. В случае когда P является проектором, этот ответ согласуется с полученным в работе (Danilov et al., 2016).

Замечание. Приведенные выше два примера можно объединить. А именно, можно задаться (конечным) множеством S и для каждого $s \in S$ задаться гильбертовым пространством H_s. (Когда S состоит из одного элемента, мы имеем квантовый случай; когда все пространства H_s одномерны – классический.) Если взять в качестве пространства V прямое произведение пространств $Herm(H_s)$, мы получаем модель, объединяющую оба случая лотерей.

Этот объединяющий пример наводит на мысль, что естественная обстановка, в которой можно говорить об обновлении, задается C^*-алгеброй (Бурбаки, 1972; Брателли, Робинсон, 1982). В самом деле, кольцо операторов из H_s в H_s, снабженное естественной инволюцией комплексного сопряжения, как и их прямое произведение по $s \in S$, является C^*-алгеброй. И в рамках конечномерных C^*-алгебр можно провести все конструкции, которые мы использовали выше – понятия эрмитова элемента, положительного элемента, следа и квадратного корня. Если же отказаться от условия конечномерности C^*-алгебры A, то пользоваться понятием следа уже нельзя. Но ответ в форме общей формулы (2) все еще справедлив. И если изначальная вера задавалась функционалом $\mu : Re(A) \to \mathbb{R}$, где $Re(A)$ обозначает множество самосопряженных элементов A, а информация получена в виде самосопряженного элемента $p \in Re(A)$, то обновленная вера задается функционалом μ' на $Re(A)$, определенным формулой: для произвольного $a \in A$ $\mu'(a) = \mu(\sqrt{p} a \sqrt{p}) / \mu(p)$.

* * *

Если на вопрос о структуре хороших предпочтений на общих лотереях имеется достаточно полный ответ (см. теорему характеризации, разд. 5), то про обновление веры этого не скажешь. Приведенные здесь результаты больше похожи на угадывание ответов на основе эстетических соображений. Данная тема заслуживает дальнейшего исследования. Возможно, потребуются более глубокое использование C^*-алгебр и бурно развивающейся теории эффект-алгебр (Gudder, Pulmanova, 1998). В этой связи представляется интересной работа (Furber, Jacobs, 2013), в которой изложен категорный подход к понятию вероятности.

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

ЛИТЕРАТУРА

Акилов Г.П., Кутуteладзе С.С. (1978). Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука.

Брателли У., Робинсон Д. (1982). Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир.

Бурбаки Н. (1972). Спектральная теория. М.: Мир.

Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970). Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука.

Фишберн П.С. (1978). Теория полезности для принятия решений. М.: Наука.

Холево А.С. (2003). Статистическая структура квантовой теории. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований.

Anscombe F.J., Aumann R.J. (1963). A Definition of Sibjective Probability // *Ann. Math. Statistics*. Vol. 34. P. 199–205.

Danilov V.I., Lambert-MogilianskyA. (2010). Expected Utility under Non-Classical Uncertainty // *Theory and Decision*. Vol. 68. P. 25–47.

Danilov V.I., Lambert-Mogiliansky A., Vergopoulos V. (2016). Dynamic Consistency of Expected utility under Non-Classic (Quantum) Uncertainty (In preparation).

Furber R., Jacobs B. (2013). Towards a Categorical Account of Conditional Probability. arXiv:1306.0831.

Ghirardato P. (2002). Revisisting Savage in a Conditionnal World // *Economic Theory*. Vol. 20. P. 83–92.

Gudder S., Pulmanova S. (1998). Representation Theorem for Convex Effect Algebras // *Comment. Math. Univ. Carolin*. Vol. 39. P. 645–659.

Gyntelberg J., Hansen F. (2004). Expected utility Theory with «Small Worlds». Univ. Copenhagen, Department Economics. Disc. paper 04–20.

Gyntelberg J., Hansen F. (2012). Expected Utility with Subjective Events // *Australian Journal of Math. Analysis and Appl*. Vol. 9. Issue 2. P. 1–21.

Herstein I.N., Milnor J. (1954). An Axiomatic Approach to Measurable Utility // *Econometrica*. Vol. 22. P. 291–297.

Pitowsky I. (2003). Betting on the Outcome of Measurements: a Bayesian Theory of Quantum Probability // *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. Vol. 34. P. 395–414.

Savage L. (1954). The foundations of Statistics. N.Y.: John Wiley.

Segal U. (1990). Two-Stage Lotteries without the Reduction Axiom. *Econimetrica*. Vol. 58. P. 349–377.

Wallace D. (2003). Everettian Rationality: Defending Deutsch's Approach to Probability in the Everett Interpretation. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*. Vol. 34. P. 415–438.

Поступила в редакцию 19 апреля 2016 года

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Akilov G.P., Kutateladza S.S. (1978). Ordered vector spaces. Novosibisk: Nauka (in Russian).

Журнал НЭА, №4 (32), 2016, с. 12–29

Anscombe F.J., Aumann R.J. (1963). A Definition of Sibjective Probability. *Ann. Math. Statistics* 34, 199–205.

Bourbaki N. (1967). Theories spectrales. Paris: Hermann.

Brattelli O., Robinson D.W. (1979). Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. 1. Berlin: Springer-Verlag.

Danilov V.I., Lambert-MogilianskyA. (2010). Expected Utility under Non-Classical Uncertainty. *Theory and Decision* 68, 25–47.

Danilov V.I., Lambert-Mogiliansky A., Vergopoulos V. (2016). Dynamic Consistency of Expected utility under Non-Classic (Quantum) Uncertainty (In preparation).

Fishburn P.C. (1970). Utility Theory for Decision Making. N.Y.: John Wiley.

Furber R., Jacobs B. (2013). Towards a Categorical Account of Conditional Probability. arXiv:1306.0831.

Ghirardato P. (2002). Revisisting Savage in a Conditionnal World. *Economic Theory* 20, 83–92.

Gudder S., Pulmanova S. (1998). Representation Theorem for Convex Effect Algebras. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 39, 645–659.

Gyntelberg J., Hansen F. (2004). Expected utility Theory with «Small Worlds». Univ. Copenhagen, Department Economics. Disc. paper 04-20.

Gyntelberg J., Hansen F. (2012). Expected Utility with Subjective Events. *Australian Journal of Math. Analysis and Appl.* 9, 2, 1–21.

Herstein I.N., Milnor J. (1954). An Axiomatic Approach to Measurable Utility. *Econometrica* 22, 291–297.

Holevo A.S. (2001). Statistical Srtucture of Quantum Theory. Berlin: Shringer-Verlag.

Neumann J. von, Morgenstern O. (1947). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton: Princeton Univ. Press.

Pitowsky I. (2003). Betting on the Outcome of Measurements: a Bayesian Theory of Quantum Probability. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 34, 395–414.

Savage L. (1954). The foundations of Statistics. N.Y.: John Wiley.

Segal U. (1990). Two-Stage Lotteries without the Reduction Axiom. *Econimetrica* 58, 349–377.

Wallace D. (2003). Everettian Rationality: Defending Deutsch's Approach to Probability in the Everett Interpretation. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* 34, 415–438.

Received 19.04.2016

Журнал НЭА,
№ 4 (32), 2016,
с. 12–29

V.I. Danilov
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Utility Theory of General Lotteries

Annotation. Generalizing the notions of roulette lotteries, horse lotteries, and quantum lotteries, we introduce maximally general notion of lottery. It uses the theory of ordered vector spaces. Under appropriate conditions on preference relation between lotteries (generalizing the conditions considered by von Neumann, Savage, Aumann and Anscombe) we give a formula for the utility of lotteries. Its ingredients are a utility function of prizes and a belief functional giving probability of events. In the second part of paper we discuss the issue about updating of beliefs under receiving additional information. We give a formula for the updated belief (which generates Bayes rule and von Neumann–Luders projection postulate), suppose that the ordered vector space is the real part of C^*-algebra.

Keywords: *utility function, probability, measurement, ordered vector space, updating, C^*-algebra.*

JEL Classification: C44, D81, D84.