УДК 512

В.И.Данилов[1], Г.А.Кошевой

Нильпотентные операторы и дискретно вогнутые функции

Аннотация

По паре подмодулей модуля над кольцом дискретного нормирования строится функция от двух целочисленных переменных. Показано что эта функция дискретно вогнута и, обратно, что всякая дискретно вогнутая функция от двух целочисленных переменных строится по модулю и двум его подмодулям. Библиография: 8 наименований.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ "Ведущие научные школы"00-15-98873

1 Введение

Хорошо известно, сколь большую роль в разных областях играют вогнутые (и/или выпуклые) функции. Однако их применение ограничивалось непрерывными переменными. Естественно ожидать, что в целочисленных задачах аналогичную роль должна играть какая-то "правильная" модификация понятия вогнутости. Довольно ясно, что считать вогнутой функцией от одной (целочисленной) переменной. Функция f на $\mathbb{Z}$ "вогнута", если $2f(a) \geq f(a-1) + f(a+1)$. Это же свойство можно выразить как невозрастание первых разностей $f(a) - f(a-1)$, откуда сразу видна связь с так называемыми разбиениями. А разбиения параметризуют многие интересные объекты - неприводимые представления $GL(N)$ и симметрических групп, симметрические функции Шура, диаграммы Юнга, конечные абелевы группы и т.п. (см. например [4]).

В работе [3] мы развиваем общую теорию дискретной (целочисленной) выпуклости. Здесь же мы хотим поговорить о следующем (после одномерного) случае - дискретно вогнутых функциях от двух (целочисленных) переменных. (Можно показать, что в случае двух переменных имеется фактически одна теория дискретной выпуклости, поэтому мы будем в дальнейшем говорить просто о дискретно вогнутых функциях.) В последующих работах мы покажем, что такие функции имеют самое непосредственное отношение к таким вопросам, как разложение на неприводимые части тензорных произведений двух неприводимых представлений, спектр суммы двух эрмитовых матриц, коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона и т.п. В настоящей работе мы обсудим связь таких функций с модулями над кольцами дискретного нормирования.

Пусть M - модуль конечной длины над кольцом дискретного нормирования A с униформизирующей T. Определим функцию емкости $c(M,\cdot)$ формулой $c(M,a) = l(M/T^aM)$, где l обозначает длину модуля, а $a = 0, 1, \cdots$. Тогда $c(M,\cdot)$ является дискретно вогнутой функцией от одной переменной. Вообще, если заданы n подмодулей $N_1, N_2, \cdots, N_n$ модуля M, можно образовать функцию емкости $c(M; N_1, \cdots, N_n; \cdot)$ от n (целочисленных) переменных $a_1, \ldots, a_n$ по правилу

$$c(M; N_1, \cdots, N_n; a_1, \cdots, a_n) = l(M/(T^{a_1}N_1 + \cdots + T^{a_n}N_n)).$$

Можно показать, что она дискретно вогнута (если более точно, то $*\mathbb{A}_n$-вогнута, в терминологии [3]). Таким образом, модули над кольцами дискретного нормирования дают способ строить дискретно вогнутые функции. И главное содержание настоящей работы заключается в том, что при $n = 2$ так получаются любые (более точная формулировка содержится в Теореме 2) дискретно вогнутые функции. Важную (хотя и промежуточную) роль при построении соответствующих модулей играют конечные частично упорядоченные множества.

2 Модули над кольцом дискретного нормирования

Хотя почти все дальнейшее проходит для произвольного кольца дискретного нормирования, мы для простоты ограничимся тем частным случаем, когда $A = K[[T]]$ есть кольцо формальных степенных рядов над некоторым полем K. В этом случае задать A-модуль (конечной длины) - это то же самое, что задать (конечномерное) векторное пространство M над полем K вместе с нильпотентным действием оператора T на нем. Длиной такого модуля называется просто размерность его как векторного пространства. В силу нильпотентности T для некоторого целого h $T^h M = 0$; минимальное такое число $h = h(M)$ называется высотой модуля M. Например, нулевой модуль имеет высоту 0; циклический модуль $C(h) = A/T^h A$ имеет высоту h. Модули высоты 1 называются *элементарными.*

Любой A-модуль (конечного типа, других не будет) представляется как прямая сумма циклических модулей. (В терминах нильпотентного оператора T это утверждение про жорданову форму.) Хотя таких разложений $M = \oplus_i C(h_i)$ может быть много, набор целых чисел h_i, упорядоченных по убыванию, определяется однозначно и называется *типом* модуля M. Тип является разбиением числа $l(M)$. Однако более удобно работать с *функцией емкости* модуля $c = c(M, \cdot)$, заданной на множестве $\mathbb{Z}_+$ натуральных чисел. Для целого $a \geq 0$ $c(M, a) = l(M/T^a M)$. Так как $l(C(h)/T^a C(h)) = \min(h, a)$, то для модуля $M = \oplus_i C(h_i)$

$$c(M, a) = \sum_i \min(h_i, a).$$

Отсюда видна "дискретная вогнутость" функции c, а также справедливость утверждения про однозначную определенность типа. В самом деле, число h_i, равных некоторому h, равно "второй производной" (или лучше - второй разности) функции c в точке h.

Мы называем $c(M, \cdot)$ функцией емкости модуля M, так как $c(M, a)$ равно размерности (длине) A-модуля $\mathrm{Hom}_A(C(a), M)$. Это снова видно из того факта, что $\mathrm{Hom}(C(a), C(h)) \cong C(\min(a, h))$. Таким образом $c(M, a)$ измеряет "количество отображений" $C(a)$ в M.

Ясно, что любая функция $c : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, которая "вогнута", равна 0 в 0 и стабилизируется при больших значениях аргумента (отсюда она автоматически монотонна) является емкостью некоторого модуля M. В самом деле, обозначим через Δ^2 оператор второй разности, то есть $\Delta^2 c(a) = 2c(a) - c(a-1) - c(a+1)$ (конечно, здесь $a \geq 1$, при $a = 0$ оператор Δ^2 неопределен). В силу вогнутости $\Delta^2 c(a) \geq 0$, и равно 0 при больших значениях a. Теперь можно задать нужный модуль M явной формулой:

$$M = \oplus_{a \geq 1} C(a)^{\Delta^2 c(a)}.$$

Пример 1. Пусть функция c задана таблицей: $c(0) = 0$, $c(1) = 3$, $c(2) = 6$, $c(a) = 7$ при $a \geq 3$. Вторые разности равны $\Delta^2(1) = 0$, $\Delta^2(2) = 2$, $\Delta^2(3) = 1$ и далее 0. Модуль M изоморфен $C(2) \oplus C(2) \oplus C(3)$.

Замечание. Функцию емкости можно определить той же формулой для любого A-модуля M конечного типа. Единственное отличие от случая, рассмотренного выше, заключается в том, что функция $c = c(M)$ уже не обязательно стабилизируется при больших значениях аргумента. Вместо этого функция c, начиная с некоторого места, становится аффинной, вида $t_0 + ra$, где r равно числу бесконечных циклических слагаемых $C(\infty)$ в разложении M, а t_0 - константа.

Пусть теперь N - подмодуль A-модуля M (то есть инвариантное относительно действия T подпространство в M). Довольно легко понять, что $c(N, \cdot) \leq c(M, \cdot)$. Более того, можно показать, что тип N будет подтипом типа M. Аналогичные утверждения верны и для фактормодуля M/N. Однако тип подмодуля N еще очень мало говорит о расположении N в M, и даже о дискретных инвариантах этого расположения.

Пример 2. Пусть $M = C(3) \oplus C(1)$ с образующими e и f, и N - моногенный подмодуль высоты 2, порожденный элементом $Te + \alpha f$, где $\alpha \in K$. Если $\alpha = 0$, фактормодуль M/N имеет тип $(1,1)$. Однако если $\alpha \neq 0$, тип фактормодуля M/N равен (2).

Таким образом, тип фактормодуля M/N не определяется типами M и N. Имеется целая серия типов (или диаграмм Юнга), связывающая тип подмодуля N с типом модуля M (последовательность Литтлвуда-Ричардсона, см. [7]). Мы предлагаем чуть иначе (с позиций дискретной вогнутости) и чуть более общим образом посмотреть на это в следующем разделе.

3 Инварианты подмодулей

Пусть M – A-модуль (конечной длины), и даны n его подмодулей $N_1, \ldots, N_n$. Для целочисленного вектора $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $N(a) = T^{a_1} N_1 + \cdots + T^{a_n} N_n$; это подмодуль модуля M. Обозначим

$c(M; N_1, \dots, N_n; a) = l(M/N(a))$. Получается некоторая (целозначная) функция $c(M; N_1, \dots, N_n; \cdot)$ на целочисленном ортанте $\mathbb{Z}_+$, которую мы называем снова функцией *емкости* модуля M относительно семейства подмодулей $N_1, \dots, N_n$.

Замечание. Собственно говоря, здесь не очень-то и нужно предположение о конечности длины M. Главное - чтобы фактормодули $M/N(a)$ имели конечную длину. А для этого достаточно было бы предполагать, что модуль M имеет конечный тип, а фактор $M/N(0)$ - конечную длину. Но для простоты мы будем считать, что M конечной длины.

Например, пусть действие T на пространстве M тривиальное (нулевое, то есть модуль M элементарный), а подмодули $N_1, \dots, N_n$ - одномерные подпространства. В этом случае функция емкости по существу (с точностью до очевидных преобразований) превращается в ранговую функцию соответствующего (векторного) матроида.

Мы будем исследовать свойства этой функции, ограничиваясь в дальнейшем случаем $n = 2$, то есть случаем пары подмодулей. Можно считать, что это сделано для простоты. Однако есть и более существенная причина. Дело в том, что предположение $n = 2$ существенно для справедливости Теоремы 2. Для больших n утверждение Теоремы 2 просто неверно, так как существуют непредставимые матроиды.

Прежде всего, $c(0)$ равняется размерности фактормодуля $M/(N_1 + N_2)$. Не особо теряя в общности можно заменить M на $N_1 + N_2$ (это изменит функцию на константу); как правило, мы так и будем считать. В этом случае $c(0) = 0$.

Вообще, имеет место простая формула сдвига

$$c(M; N_1, N_2; a + b) = c(M; T^{a_1} N_1, T^{a_2} N_2; b).$$

Заметим также, что если S - подмодуль в M, содержащийся в $N(a)$, то функция не изменится для значений аргумента $a' \leq a$ при замене модуля M на его фактормодуль M/S (конечно, нужно заменить N_1 и N_2 на их образы в M/S).

Зафиксируем временно вторую координату $a_2 \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим ограничение нашей функции на "горизонтальную прямую" (a_1, a_2), $a_1 \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь первым замечанием, мы можем заменить N_2 на $T^{a_2} N_2$. А пользуясь вторым, заменить M на фактормодуль $M/T^{a_2} N_2$. После этого мы видим, что

$$c(M; N_1, N_2; (a_1, a_2)) = c(\bar{M}; \bar{N}_1, 0; (a_1, a_2)),$$

где $\bar{M} = M/T^{a_2} N_2$, а $\bar{N}_1$ - образ N_1 в $\bar{M}$, то есть $\bar{N}_1$ равен $(N_1 + T^{a_2} N_2 / T^{a_2} N_2 = N_1/(N_1 \cap T^{a_2} N_2)$. Окончательно получаем, что

$$c(M; N_1, N_2; (\cdot, a_2)) = l(\bar{M}/\bar{N}_1) + c(\bar{N}_1, \cdot).$$

То есть ограничение нашей функции c на "горизонтальную прямую" на высоте a_2 совпадает (с точностью до константы $l(M/(N(0,a_2)))$) с функцией емкости модуля $\bar{N}_1 = N_1/(N_1 \cap T^{a_2} N_2)$.

Стоит отметить два частных случая. Первый - когда $a_2 = 0$, то есть мы ограничиваемся на ось абсцисс. Тогда наша функция c совпадает (с точностью до константы $l(M/N_1 + N_2)$) с функцией емкости модуля $N_1/(N_1 \cap N_2) = (N_1 + N_2)/N_2$. Или, если $M = N_1 + N_2$, то просто совпадает с $c(M/N_2, \cdot)$ - функцией емкости фактормодуля M/N_2 . Второй частный случай - когда a_2 - "большое" число ($\geq h(N_2)$). Тогда $T^{a_2} N_2 = 0$, и ограничение нашей функции c на "высокую горизонтальную" прямую совпадает (с точностью до константы $l(M/N_1)$) с функцией емкости модуля N_1 .

Аналогично дело обстоит с ограничением на "вертикальные прямые". В любом случае, для "больших" a (например, когда $a \geq (h(M), h(M))$) функция c стабилизируется на значении $l(M)$. По этой причине мы часто будем рассматривать функцию c на "квадрате" $\{0, 1, \ldots, h(M)\}^2 \subset \mathbb{Z}_+^2$. Итак, при условии $M = N_1 + N_2$ картина такая:

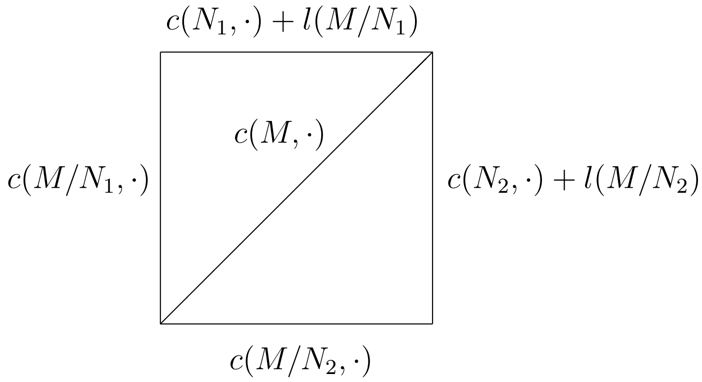


Рис. 1

Полезно еще отметить, что на диагонали наша функция совпадает с функцией емкости модуля M . Стоит также отметить, что при $N_2 = M$ (случай, рассмотренный в [7]: последовательности Литтлвуда-Ричардсона) функция c на "нижнем основании" тождественно нулевая.

Конечно, функция c монотонна. Однако главное структурное свойство функции емкости $c(M, N_1, N_2; \cdot)$ заключается в ее "дискретной вогнутости". Конечно, дискретная вогнутость влечет, что нашу функцию c можно продолжить до вогнутой функции $\tilde{c}$ на всем положительном квадранте $\mathbb{R}_+^2$. Однако на самом деле для дискретной вогнутости требуется гораздо большее. А именно, что существует такое вогнутое продолжение $\tilde{c}$, которое является аффинным на каждом симплексе стандартной триангуляции квадранта. Под стандартной триангуляцией мы понимаем триангуляцию $\mathbb{R}^2$, которая получается иссечением плоскости прямыми трех сортов: $x_1 =$ целому числу, $x_2 =$ целое число и $x_2 = x_1 +$ целое число. Иначе говоря, двумерные симплексы этой триангуляции получаются целыми сдвигами двух треугольников, полученных разбиением квадрата $[0,1]^2$ диагональю. Вот соответствующая картинка

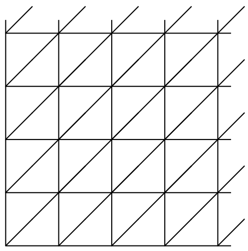


Рис. 2

Разумеется, дискретную вогнутость можно сформулировать непосредственно в терминах функции c, не обращаясь к продолжению. Вообще, пусть f - функция на $\mathbb{Z}_+^2$ (или на $\mathbb{Z}^2$). Мы скажем, что она *дискретно вогнута*, если для любой точки $a \in \mathbb{Z}_+^2$ выполнены три сорта неравенств (обобщающие в каком-то смысле неравенства $\Delta^2 f \geq 0$ для функций одной переменной):

1. $f(a_1, a_2) + f(a_1+1, a_2+1) \geq f(a_1+1, a_2) + f(a_1, a_2+1)$.
2. $f(a_1, a_2) + f(a_1+2, a_2+1) \leq f(a_1+1, a_2) + f(a_1+1, a_2+1)$.

$2'$. $f(a_1, a_2) + f(a_1+1, a_2+2) \leq f(a_1, a_2+1) + f(a_1+1, a_2+1)$.

Наглядно эти неравенства соответствуют трем рисункам, где разделяющее ребро указывает пару вершин с большим (или равным) значением суммы значений f:

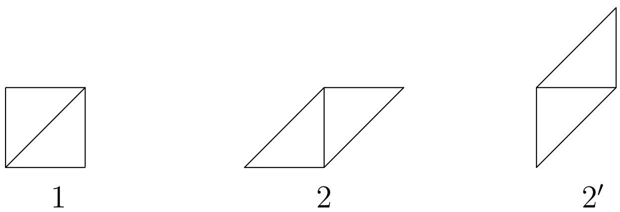


Рис. 3

Отметим, что наша дискретная вогнутость влечет "вогнутость" ограничения f на горизонтальные, вертикальные и диагональные "прямые", как показывает Рис. 4 (приращение функции на стрелке $c \leq$ приращения на стрелке b, а то, в свою очередь, $\leq$ приращения на стрелке a).

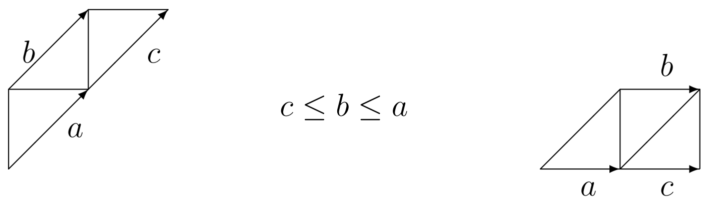


Рис. 4

Теорема 1. *Функция емкости модуля относительно пары подмодулей* $c(M; N_1, N_2) : \mathbb{Z}_+^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ *дискретно вогнута.*

Доказательство. Нужно проверить пару соотношений 1 и 2 (соотношение $2'$ проверяется аналогично). В силу формулы сдвига мы можем считать $a = 0$ и $M = N_1 + N_2$. При проверке соотношения 1 мы можем также считать, что модули N_1 и N_2 элементарные, то есть просто векторные пространства. Соотношение принимает вид:

$$l(N_1 + N_2) \geq l(N_1 + N_2/N_1) + l(N_1 + N_2/N_2).$$

Или $l(N_1) + l(N_2) \geq l(N_1 + N_2)$, что уже очевидно.

Рассмотрим теперь соотношение 2. Снова можно считать, что $M = N_1 + N_2$, $TN_2 = 0$ и $T^2 N_1 = 0$. Оно тогда имеет вид

$$l(M/TN_1 + N_2) + l(M/TN_1) \geq l(M),$$

или

$$l(M/TN_1 + N_2) \geq l(TN_1).$$

Это неравенство следует из сюръективности гомоморфизма умножения на T

$$(N_1 + N_2)/(TN_1 + N_2) \longrightarrow TN_1.$$

Сюръективность же видна из того, что композиция гомоморфизмов

$$N_1/TN_1 \longrightarrow (N_1 + N_2)/(TN_1 + N_2) \longrightarrow TN_1$$

сюръективна. □

Замечание. Аналогично устанавливается дискретная вогнутость функции емкости для n подмодулей. Но для $n = 2$ мы доказываем обращение Теоремы 1. А именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathbb{Z}_+^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ *- дискретно вогнутая функция, причем* $f(0) = 0$ *и* f *стабилизируется при больших значениях аргумента. Тогда существует модуль* M *конечной длины и два его подмодуля* N_1 *и* N_2*, такие что* $f(\cdot) = c(M; N_1, N_2; \cdot)$.

Замечание. На самом деле, два последних условия (равенство 0 в 0 и стабилизация при больших значениях аргумента) не очень существенны. Повторяя рассуждения, приводимые ниже, видно, что утверждение теоремы остается верным, если мы будем использовать модули конечного типа вместо модулей конечной длины. Но мы не хотим на это отвлекаться.

Остаток работы будет посвящен доказательству теоремы 2. Для этого мы будем явно конструировать требуемые модуль и его подмодули. Это будет сделано в три этапа. Сначала мы анализируем геометрическую структуру, связанную с дискретно вогнутой функцией, а именно ее паутину. Затем с помощью паутины мы строим некоторое конечное (частично) упорядоченное множество. Наконец, по упорядоченному множеству и двум его естественным идеалам мы строим требуемый модуль и пару его подмодулей.

4 Паутина дискретно вогнутой функции

Пусть f - произвольная функция на $\mathbb{Z}^2_+$. Пользуясь введенной в разделе 3 стандартной триангуляцией Σ квадранта $\mathbb{R}^2_+$, продолжим канонически функцию f на этот квадрант. А именно, на каждый симплекс этой триангуляции продолжим функцию f по аффинности; полученное продолжение обозначим $\tilde{f}$. По построению, функция $\tilde{f}$ кусочно линейна, или точнее кусочно аффинна. Изломы, то есть нарушения аффинности могут происходить лишь вдоль ребер нашей триангуляции Σ. Снабжая ребра соответствующими кратностями, мы превращаем Σ во взвешенный граф, который будем называть *паутиной*.

Более подробно. С каждым ребром e (точнее, внутренним ребром, не лежащим на границе квадранта) триангуляции Σ свяжем число $\delta(e)$ - степень излома функции $\tilde{f}$ (или f) вдоль этого ребра. К такому ребру $e = [x, y]$ примыкают ровно два треугольника, скажем, $[x, y, z]$ и $[x, y, z']$. Так вот,

$$\delta_f(e) = \delta(e) = f(x) + f(y) - f(z) - f(z').$$

(Для граничного ребра степень излома неопределена, так как к нему примыкает только один треугольник. Если угодно, можно считать ее равной $+\infty$.) Приписывая ребрам Σ эту кратность, мы снабжаем одномерный остов Σ структурой взвешенного графа.

Числа $\delta(e)$ не произвольны; для каждой внутренней (не лежащей на границе квадранта) вершины a имеется одно соотношение. А именно, рассмотрим шесть ребер нашей триангуляции, выходящие из вершины

a, и ориентируем их в направлении от a. Тогда *сумма этих шести векторов с учетом кратностей равна* 0. Назовем это утверждение **Леммой о бездивиргентности.**

Доказательство очень просто. Без особого ущерба для общности можно считать, что $a = 0$. Шесть векторов-ребер, выходящие из a, это вектора $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$ и $(0,-1)$. Рассмотрим вторую (y-вую) координату нашей суммы. Она равна сумме кратностей второго и третьего ребра минус сумма кратностей пятого и шестого. Первая сумма равна

$$f(0,0)+f(1,1)-f(1,0)-f(0,1)+f(0,0)+f(0,1)-$$
$$f(1,1)-f(-1,0)=2f(0,0)-f(1,0)-f(-1,0).$$

Вторая сумма равна

$$f(0,0)+f(-1,-1)-f(-1,0)-f(0,-1)+f(0,0)+f(0,-1)-$$
$$f(-1,-1)-f(1,0)=2f(0,0)-f(-1,0)-f(1,0),$$

что то же самое.

Аналогично проверяется соотношение для первой (x-вой) координаты. $\square$

Очевидно, что если функция $\tilde{f}$ вогнута (то есть исходная функция f дискретно вогнута), то кратности всех ребер неотрицательны. Верно и обратное, но нам это не понадобится. Более того, паутина функции однозначно определяет функцию с точностью до прибавления аффинной функции. Так что она несет в себе существенную информацию о функции. А если функция еще и принимает целые значения (как функция емкости $c(M;N,N;\cdot)$), то и кратности (веса) ребер - целые неотрицательные числа. Наглядно мы будем представлять такую (целочисленную) паутину, проводя k близких параллельных отрезков вместо ребра кратности k.

Пример 3. Рассмотрим функцию f на $\mathbb{Z}^2_+$, заданную таблицей

...	....	....	...	....	....
2	4	6	7	7	....
2	4	6	7	7	....
2	4	5	6	6	...
1	3	4	4	4	...
0	1	2	2	2	...

Фактически она задана на "квадрате" $\{0,1,2,3\}^2 \subset \mathbb{Z}^2_+$, а дальше продолжается по монотонности. Как легко понять, ее паутина имеет вид

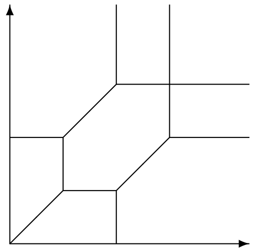
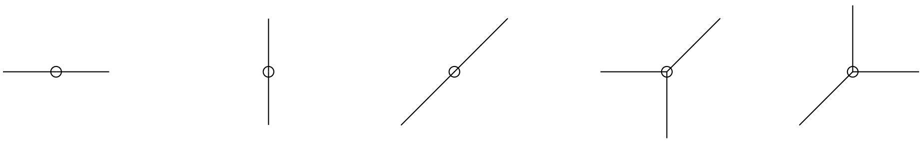


Рис.5

В окрестности каждой (внутренней) вершины нашу паутину можно понимать как наложение нескольких локальных картинок одного из пяти типов:



$a)$ $b)$ $c)$ $d)$ $e)$

Рис.6

Ребра нашей паутины делятся на три группы - горизонтальные, вертикальные и диагональные (коротко - h-ребра, v-ребра и d-ребра). Диагональные ребра, как мы увидим, будут играть особую роль. Это объясняется следующим соотношением.

Предложение 1. *Для точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2_+$ выполнено равенство:*

$$f(x) = D(x) + f(x_1, 0) + f(0, x_2) - f(0, 0),$$

где $D(x)$ - суммарное число d-ребер паутины функции f, попавших в регион $x - \mathbb{R}^2_+$.

Доказательство. Очевидно, это равенство верно для точек на границе квадранта $\mathbb{R}^2_+$. Пусть теперь точка x находится строго внутри квадранта. Рассмотрим три вспомогательные точки $x_h = x - (1, 0)$, $x_v = x - (0, 1)$ и $x_d = x - (1, 1)$. Так как они находятся строго ниже x, для них по индукции формула верна. После этого остается только показать, что степень излома функции D вдоль ребра $e = [x_d, x]$ совпадает с $\delta_f(e)$. Но степень излома D вдоль e равна

числу d-ребер ниже x + число d-ребер ниже x_d - число d-ребер ниже x_h - число d-ребер ниже x_v, что равно числу d-ребер в квадрате $[x, x_v, x_d, x_h]$, то есть как раз $\delta_f(e)$. $\square$

Для дальнейшего удобно представить слагаемые $f(x_1, 0)$ и $f(0, x_2)$ в похожем виде. Для этого мы добавим к паутине функции f несколько диагональных ребер, расположенных уже за пределами квадранта. Рассмотрим, например, целую точку $a = (a_1, 0)$ на горизонтальной грани квадранта. Свяжем с этой точкой целое число $\epsilon(a)$, равное числу (с учетом, конечно, кратностей) v-ребер и d-ребер нашей паутины, смежных a. Так вот, выпустим из точки a в точку $a' = (0, -a_1)$ отрезок d-типа с кратностью $\epsilon(a)$. И так мы проделаем с каждой целой точкой на горизонтальной грани квадранта. Аналогично нужно поступить с точками на вертикальной грани квадранта: из каждой точки $a = (0, a_2)$ выпустить в точку $a' = (-a_2, 0)$ отрезок с кратностью, равной числу h-ребер и d-ребер, смежных a.

Полученное образование будем называть *расширенной паутиной* функции f. Поясним это на примере.

Пример 4. Рассмотрим (дискретно вогнутую, как можно непосредственно проверить) функцию

$$\begin{array}{cccccc}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
4 & 7 & 10 & 11 & 12 & \dots \\
4 & 7 & 10 & 11 & 11 & \dots \\
4 & 7 & 9 & 10 & 10 & \dots \\
4 & 6 & 7 & 8 & 8 & \dots \\
2 & 4 & 5 & 5 & 5 & \dots \\
0 & 1 & 2 & 2 & 2 & \dots
\end{array}$$

Конечно, здесь указаны только начальные значения, дальше все стабилизируется. Ниже изображена расширенная паутина этой функции

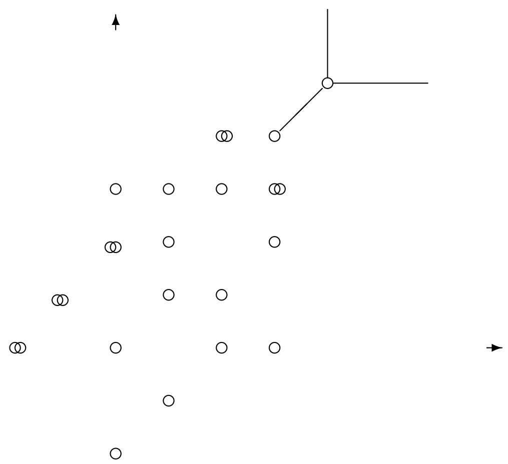


Рис. 7

Предложение 1'. *Пусть* f *- дискретно вогнутая функция, стабилизирующаяся при больших значениях аргумента. Тогда*

$$f(x) = \tilde{D}(x) - f(0),$$

где $\tilde{D}(x)$ *- число* d*-ребер расширенной паутины функции* f*, попавших в регион* $x - \mathbb{R}^2_+$.

Так, в примере 4, возьмем точку $x = (1,2)$. Как видно из рисунка 7, ниже ее расположены 6 d-ребер расширенной паутины, что совпадает со значением $f(1,2)$.

Доказательство. Обозначим через f_1 ограничение f на горизонтальную ось, $f_1(y) = f(y,0)$ для $y \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что

$$f_1(\cdot) = f_1(0) + \sum_k \Delta^2 f_1(k) \min(k, \cdot),$$

С другой стороны, $\Delta^2 f_1(k)$ равно $\epsilon(k,0)$ - числу v-ребер и d-ребер паутины, смежных точке $(k,0)$. Наконец, $\min(k,y)$ - это число ребер на отрезке, выпущенном из точки $(k,0)$, расположенных левее y. Собирая все вместе, мы и получаем нужное соотношение. $\square$

5 Частично упорядоченное множество $\mathbb{P}(f)$

Снова пусть $f : \mathbb{Z}^2_+ \to \mathbb{Z}$ - стабилизирующаяся дискретно вогнутая функция, равная 0 в 0. Из предыдущего мы видели, что функция f восстанавливается по d-ребрам расширенной паутины функции f. Естественно ожидать, что нужные для теоремы 2 модули должны строиться с помощью таких d-ребер. Однако предварительно мы построим некоторое (конечное) частично упорядоченное множество (посет, poset) $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f)$.

Как множество, $\mathbb{P}$ содержит столько элементов, сколько имеется d-ребер (с учетом кратностей) в расширенной паутине функции f. Элемент $\mathbb{P}$, соответствующий ребру $[a, a+(1,1)]$ расширенной паутины, мы будем располагать над точкой a. Тем самым мы получаем отображение $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{Z}^2$. (Над точкой $a \in \mathbb{Z}^2_+$ располагается ровно $\delta(e)$ элементов $\mathbb{P}$, где $e = [a, a+(1,1)]$. Аналогично можно посчитать число прообразов π над остальными точками.) Предложение $1'$ говорит, что $f(x)$ равно числу элементов $\mathbb{P}$, расположенных строго ниже точки x.

Структуру частичного порядка в $\mathbb{P}$ введем, пользуясь структурой частичного порядка в $\mathbb{Z}^2$. А именно, для элементов p и q из $\mathbb{P}$ будем считать, что $q < p$ (и проводить стрелку из p в q), если обе координаты точки $\pi(q)$ строго больше, чем координаты точки $\pi(p)$. Так, для примера 4 соответствующий посет изображен на рис. 8 (мы рисуем только "существенные"стрелки, остальные получаются по транзитивности).

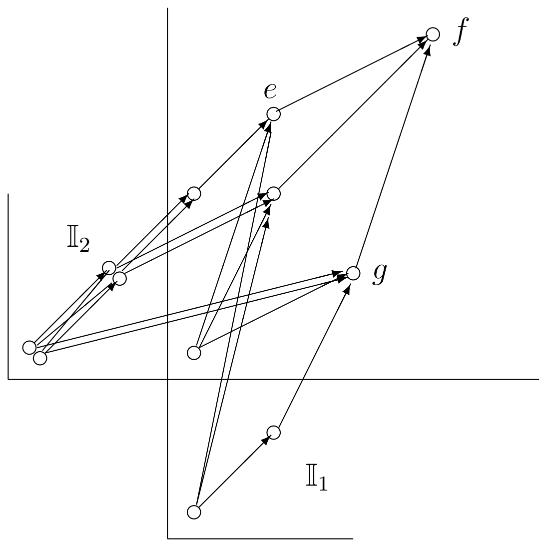


Рис.8

То, что стрелки увеличивают координаты, позволяет рассмотреть несколько естественных идеалов в $\mathbb{P}$. (Идеалом в частично упорядоченном множестве называется подмножество, которое с каждым элементом содержит меньшие элементы.) Идеал $\mathbb{I}_1$ состоит из всех элементов с неотрицательной первой координатой. Более того, обозначим через $\mathbb{I}_1(k)$, $k \geq 0$, идеал элементов p, таких что первая координата точки $\pi(p)$ не меньше k. Ясно, что $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1(0)$. Аналогично введем идеалы

$\mathbb{I}_2(k)$, $k \geq 0$, элементов со второй координатой $\geq k$; $\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_2(0)$. В этих терминах предложение 1' принимает вид:

Предложение 1". *Для точки* $x \in \mathbb{Z}_+^2$ *значение* $f(x)$ *равно числу элементов в множестве* $\mathbb{P} \setminus (\mathbb{I}_1(x_1) \cup \mathbb{I}_2(x_2))$. $\square$

Эта формула уже очень напоминает формулу для емкости: $c(x) = l(M/(T^{x_1}N_1 + T^{x_1}N_2))$. Роль модуля M играет посет $\mathbb{P}$, роль подмодуля N_i - идеал $\mathbb{I}_i$, а роль подмодуля $T^k N_1$ - идеал $\mathbb{I}_1(k)$. Остается только придать этой аналогии точный смысл, чем мы и займемся в следующем разделе.

6 Частично упорядоченные множества и нильпотентные операторы

Пусть $\mathbb{P}$ - конечное частично упорядоченное множество (посет). Для наглядности, мы проводим стрелку из большего элемента в меньшее. Если воспринимать эти стрелки как действие оператора T, мы получаем нильпотентный оператор (или модуль над кольцом $A = K[[T]]$; более точно мы скажем ниже). В частности, можно говорить о типе этого модуля, то есть о соответствующей диаграмме Юнга. Интересно, что первоначально по посету была построена именно диаграмма Юнга (в работе [5], см. также [2]). И лишь позднее, в [8] была введена промежуточная конструкция пространства с нильпотентным действием. Опишем кратко эту конструкцию, отсылая за подробностями к упомянутым работам.

Итак, пусть $\mathbb{P} = (P, >)$ - конечное частично упорядоченное множество. Рассмотрим векторное пространство $M = K \otimes P$ с базисом из выражений $[p] = 1 \otimes p$, $p \in P$. Мы хотим задать на M нильпотентное действие T, пользуясь структурой порядка $>$. Несомненно, что $T[p]$ должен представлять собой линейную комбинацию $[q]$ с $q < p$, но какую? Видимо, правильнее всего считать, что эти коэффициенты должны быть алгебраически независимыми; в частности, поле K должно быть "большим". Поступим поэтому так. Для каждой пары элементов p и q с $p > q$ возьмем независимую переменную X_{pq} , а в качестве поля K возьмем поле $\mathbb{F}(X_{pq}, p > q)$ рациональных функций над некоторым вспомогательным базисным полем $\mathbb{F}$. Действие T зададим формулой

$$T[p] = \sum_{q<p} X_{pq}[q].$$

Заданный этой формулой A-модуль M будем обозначать как $K \otimes \mathbb{P}$.

Например, если $\mathbb{P}$ - тривиальное частично упорядоченное множество, в котором все элементы несравнимы между собой, то $K \otimes \mathbb{P}$ - элементарный модуль. Напротив, если $\mathbb{P}$ - цепь (то есть изоморфно естественно упорядоченному множеству $\{1, 2, ..., n\}$), то $K \otimes \mathbb{P}$ - циклический модуль $C(n)$ с образующей $[n]$. Вообще, если $\mathbb{P}$ есть несвязная сумма частично упорядоченных множеств $\mathbb{P}$, $\mathbb{P} = \coprod_i \mathbb{P}_i$ (это значит, что элементы из разных $\mathbb{P}_i$ несравнимы между собой), то модуль $K \otimes \mathbb{P}$ есть прямая сумма модулей $K \otimes \mathbb{P}_i$.

Отметим, что предыдущая конструкция не совсем функториальна, и морфизмы частично упорядоченных множеств не дают гомоморфизмы соответствующих модулей. Однако если $\mathbb{I}$ - идеал в $\mathbb{P}$, то модуль $K \otimes \mathbb{I}$ естественным образом реализуется как подмодуль модуля $K \otimes \mathbb{P}$.

Каждое (конечное) частично упорядоченное множество обладает канонической фильтрацией, состоящей из идеалов. Введем следующее понятие. *Глубиной* элемента p назовем максимальную длину цепочки $p_0 > p_1 > ... > p_n = p$ в частично упорядоченном множестве $\mathbb{P}$. На самом верху (на глубине 0, то есть "на поверхности") располагаются максимальные элементы $\mathbb{P}$; на глубине 1 - максимальные элементы $\mathbb{P} \setminus \max(P)$, и так далее. Для целого $k \geq 0$ обозначим через $\mathbb{P}(k)$ множество элементов глубины $\geq k$. Это идеал в $\mathbb{P}$, и мы получаем (глубинную) фильтрацию идеалов

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(0) \supset \mathbb{P}(1) \supset ...$$

Соответственно мы получаем *глубинную* фильтрацию модуля $M = K \otimes \mathbb{P}$:

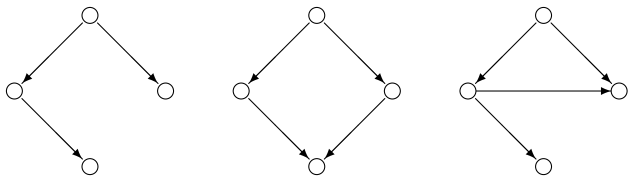
$$M = M(0) \supset M(1) \supset ...,$$

где $M(k) = K \otimes \mathbb{P}(k)$. Эта фильтрация похожа на T-адическую, во всяком случае всегда имеет место включение $M(k+1) \supset TM(k)$. В общем случае равенства здесь нет. Например, для такого посета из трех элементов: $p < q > r$. Имеется, однако, важный класс частично упорядоченных множеств, для которых глубинная фильтрация совпадает с T-адической.

Представим, что частично упорядоченное множество является несвязным объединением нескольких цепей. Такой посет $\mathbb{P}$ назовем *банальным*. Очевидно, что для соответствующего модуля $K \otimes \mathbb{P}$ глубинная фильтрация совпадает с T-адической. Конечно, это мало интересный случай. Более интересно, что некоторые усиления банальных посетов также обладают этим свойством.

Определение. Пусть $\mathbb{P}_0 = (P, >_0)$ и $\mathbb{P} = (P, >)$ - два частичных порядка на одном и том же множестве P, и порядок $>$ сильнее, чем $>_0$ (это означает, что $p >_0 q$ влечет $p > q$). Скажем, что $\mathbb{P}$ - *несущественное усиление* $\mathbb{P}_0$, если $p > q$ влечет, что $\mathbb{P}_0$-глубина q строго больше, чем $\mathbb{P}_0$-глубина p.

Неформально говоря, новые стрелки в $\mathbb{P}$ идут только в большую глубину. На следующем рисунке изображен посет $\mathbb{P}_0$ и два его усиления: несущественное $\mathbb{P}$ и существенное $\mathbb{P}'$.



$\mathbb{P}_0$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}'$

Рис. 9

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{P}$ - усиление $\mathbb{P}_0$. Это усиление несущественно тогда и только тогда, когда функция глубины одна и та же.*

Доказательство. Пусть $d : P \to \mathbb{Z}$ - функция глубины посета $\mathbb{P}$, а d_0 - для посета $\mathbb{P}_0$. Так как $\mathbb{P}$ сильнее, то $d \geq d_0$.

Предположим, что $\mathbb{P}$ - несущественное усиление, и покажем, что глубина не возрастает. Пусть $p_0 > p_1 > ... > p_k = p$ - одна из цепочек в посете $\mathbb{P}$. Так как $0d_0(p_0) < d_0(p_1) < ... < d_0(p_k) = d_0(p)$, то $d_0(p) \geq k$, откуда $d_0(p) \geq d(p)$.

Обратно столь же просто. $\square$

Вполне возможно, что если $\mathbb{P}$ - несущественное усиление посета $\mathbb{P}_0$ (или они несущественно эквивалентны), то модули $K \otimes \mathbb{P}$ и $K \otimes \mathbb{P}_0$ изоморфны. Мы умеем доказывать это только для ручных посетов.

Определение. Несущественное усиление банального посета назовем *ручным* посетом.

На рис. 10 изображены ручной и неручной посеты

ручной посет $\qquad\qquad$ неручной посет

Рис. 10

Очевидно, что для ручного посета $\mathbb{P}$ все его глубинные идеалы $\mathbb{P}(k)$, $k = 0, 1, ...$, тоже являются ручными.

Основной результат про ручные посеты состоит в том, что для ассоциированных модулей глубинная и T-адическая фильтрации совпадают.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbb{P}$ *- ручное частично упорядоченное множество. Тогда для любого целого* $k \geq 0$ $T^k(K \otimes \mathbb{P}) = K \otimes \mathbb{P}(k)$.

Доказательство. Так как идеалы $\mathbb{P}(k)$ тоже ручные, достаточно доказать утверждение для $k = 1$. Более того, факторизуя по $K \otimes \mathbb{P}(2)$, можно считать, что $\mathbb{P}$ имеет высоту 2, то есть $\mathbb{P}(2)$ пусто. В этой ситуации нам нужно показать, что гомоморфизм векторных пространств

$$T : K \otimes P_0 \to K \otimes P_1$$

(где P_i - элементы высоты i) сюръективен. Вспоминая про "обратную инъекцию" $\phi_0 : P_1 \to P_0$, мы можем заменить P_0 на $\phi_0(P_1)$. Отображение T задается формулой $T[p] = \sum_{q<p} X_{pq}[q]$, где p из P_0, а q из P_1. Нам остается проверить, что определитель отображения T в этом базисе отличен от нуля. Но этот определитель есть сумма мономов вида $\prod_q X_{pq}$, где $p > q$. Разные мономы не могут сократиться, и поэтому нужно показать, что имеется хоть один такой моном. Существование такого монома снова обеспечивает инъекция ϕ_0; нужно взять $\prod_q X_{\phi_0(q)q}$. $\square$

Следствие. *Если* $\mathbb{P}_0$ *- банальный посет, а* $\mathbb{P}$ *- его несущественное усиление, то модули* $K \otimes \mathbb{P}_0$ *и* $K \otimes \mathbb{P}$ *изоморфны.*

В самом деле, оба эти модуля имеют одну и ту же функцию емкости (см. раздел 2), а именно, $c(k+1) = |P_0| + ... + |P_k|$ для каждого целого неотрицательного k. $\square$

7 Доказательство теоремы 2

Теперь мы уже вполне готовы к доказательству теоремы 2.

Итак, пусть $f : \mathbb{Z}_+^2 \to \mathbb{Z}$ - дискретно вогнутая функция, равная 0 в 0 и стабилизирующаяся при больших значениях аргумента. В разделе 5 мы построили посет $\mathbb{P} = \mathbb{P}(f)$ и два его идеала $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$. Положим теперь $M = K \otimes \mathbb{P}$ и $N_i = K \otimes \mathbb{I}_i$, $i = 1, 2$. Мы утверждаем, что функции $f(\cdot)$ и $c(M, N_1, N_2; \cdot)$ совпадают. В силу Предложения $1''$ и Предложения 2 это вытекает из следующего утверждения:

Предложение 3. *Посеты* $\mathbb{I}_1$ *и* $\mathbb{I}_2$ *ручные.*

Доказательство. Собственно, здесь впервые мы существенно пользуемся тем, что функция f дискретно вогнута. Мы будем проверять, что посет $\mathbb{I}_1$ ручной; проверка для $\mathbb{I}_2$ аналогична.

Элементы посета $\mathbb{I}_1$ расположены над точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ с неотрицательными первыми координатами (то есть над правой полуплоскостью). Как легко понять, глубина элемента - это в точности его первая координата. Так и обозначим через P_k элементы посета $\mathbb{I}_1$ с абсциссой k. Нам нужно показать, что существует инъективное отображение P_k в P_{k-1}, которое при этом строго понижает вторую координату (ординату). Мы приведем два рассуждения, доказывающие это ключевое утверждение.

Первое рассуждение. Напомним, что элементы посета - это по существу d-ребра (расширенной) паутины функции f. Когда мы рассказывали про паутину, мы говорили, что эта паутина представляет наложение локальных картинок из рис. 6. Пользуясь такой распутанной паутиной, мы можем связать с каждым d-ребром, "выходящем"из точки с абсциссой k, некоторое "свое" d-ребро, "входящее"в точку с абсциссой k, лежащее строго ниже. Делается это так. Если это d-ребро имело вид c) из рис. 6, к нему подходит снизу d-ребро, которое мы и ассоциируем с исходным. Если же это было d-ребро из картинки d), то от него вниз идет вертикальная нитка. Эта нитка либо заканчивается в картинке e) и дает нужное d-ребро. Либо она идет до оси абсцисс (то есть до горизонтальной грани квадранта), и тогда из этой граничной точки выходит нужное "добавленное" d-ребро расширенной паутины.

Второе рассуждение. Зафиксируем k; интересующий нас вопрос относится к d-ребрам из вертикальной полосы $k \leq x_1 \leq k+1$ (это элементы P_k) и d-ребрам из вертикальной полосы $k-1 \leq x_1 \leq k$. Существование нужной инъекции из P_k в P_{k-1} будет установлено, если мы установим следующее утверждение. Пусть для целого h $Z(k,h)$ означает число d-ребер расширенной паутины, расположенных в вертикальной полосе $k \leq x_1 \leq k+1$ и ниже h. Тогда наше утверждение состоит в том, что

$$Z(k,h) \leq Z(k-1,h-1).$$

В самом деле, имея это утверждение, мы знаем, что для самых нижних d-ребер из полосы $k \leq x_1 \leq k+1$ имеется по крайней мере столько же d-ребер из предыдущей полосы и расположенных строго ниже. Поэтому мы можем из как-то связать. Поднимаясь на ступеньку выше, мы видим, что для новых d-ребер мы также можем найти достаточное количество нужных d-ребер и так далее.

Теперь доказательство утверждения. Снова как легко понять, число $Z(k,h)$ равно приращению функции f на отрезке $[(k,h),(k+1,h)]$, то есть

$$Z(k,h) = f(k+1,h) - f(k,h).$$

Аналогично

$$Z(k-1,h-1) = f(k,h-1) - f(k-1,h-1).$$

Разность $Z(k-1,h-1)-Z(k,h)$, как легко понять, есть как раз степень излома f вдоль v-ребра $[(k,h-1),(k,h)]$, и поэтому неотрицательна. (Точнее, она неотрицательна при $h \geq 1$ из дискретной вогнутости f. Для $h \leq 0$ равенство $Z(k-1,h-1) = Z(k,h)$ видно из построения расширенной паутины.) $\square$

Итак, теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] *Berenstein A.D., Zelevinsky A.V.* Triple multiplicities for $sl(r+1)$ and the spectrum of the exterior algebra of adjoint representation // J. of Algebraic Combinatorics. 1992.T. 1. C. 7-22.

[2] *Britz T., Fomin S.* Finite posets and Frrrers Shapes // Advances in Mathematics. 2001 T. 158. C. 86-127.

[3] *Danilov V.I., Koshevoy G.A.* Discrete convexity and unimodulatity.I // Advances in Mathematics (в печати)

[4] *Fulton W.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus // Bulletin of the Amer. Math. Soc. 2000. T.37. C. 209-249.

[5] *Green C., Kleitman D.J.* The structure of Sperner k-families // J. Combin. Theory Ser. A. 1976. T.20. C. 41-68.

[6] *Klein T.* The multiplication of Schur-functions and extensions of p-modules // J. London Math. Soc. 1968. T.43. C. 280-284.

[7] *Macdonald I.G.* Symmetric Functions and Hall Polinomials. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press. Oxford 1979 (русский перевод: И.Макдональд. Симметрические функции и многочлены Холла. Мир. Москва 1985)

[8] *Saks M.* Dilworth numbers, incidence maps and product partial orders // SIAM J. Algebraic Discrete Meth. 1980. T.1. C. 211-215.

Сведения об авторах

Данилов Владимир Иванович (автор ответственный за переписку)
Центральный экономико-математический институт РАН
Москва, 117418, Нахимовский проспект, 47
тел. 332-4606
E-mail: vdanilov43@mail.ru

Кошевой Глеб Алексеевич
Центральный экономико-математический институт РАН
Москва, 117418, Нахимовский проспект, 47
тел. 332-4606
E-mail: koshevoy@cemi.rssi.ru

Danilov V.I., Koshevoy G.A.
Nilpotent operators and discretely concave functions.