УДК 511.5, 514.174.6

В.П. Гришухин, В.И. Данилов

Поднятие параллелоэдров

Параллелоэдр – это такой многогранник, параллельными сдвигами которого можно замостить пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Г.Вороной выдвинул гипотезу, что всякий параллелоэдр аффинно эквивалентен ячейке Дирихле-Вороного некоторой решетки. Б.Делоне в статье по перечислению 4-мерных параллелоэдров использовал термин *параллелоэдр смещения*. В настоящей работе этот параллелоэдр называется *параллелоэдром поднятия*, так как он получается как расширение параллелоэдра до параллелоэдра размерности на единицу больше.

В данной статье показано, что в результате операции поднятия получаются именно те параллелоэдры, сумма Минковского которых с некоторым нетривиальным отрезком снова является параллелоэдром. Доказывается, что для параллелоэдров, допускающих поднятие и поднятых в общем положении, справедлива гипотеза Вороного.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: параллелоэдральное разбиение, решетка, свободное направление, женератриса, ламина.

§ 1. Введение

Параллелоэдр - это выпуклый многогранник в аффинном пространстве V, сдвиги которого на векторы некоторой дискретной решетки правильно заполняют все пространство V. Например, таким является параллелограмм на плоскости или центрально симметричный шестиугольник. Этими двумя фигурами исчерпывается список двумерных параллелоэдров. В трехмерном случае имеется уже 5 типов параллелоэдров. Мы нарисуем только один, так называемый трехмерный пермутаэдр.

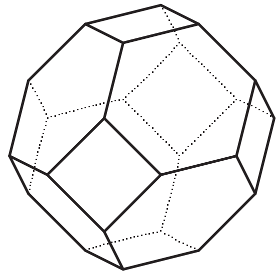

Рис. 1

© В.П. Гришухин, В.И. Данилов, 2019

Дело в том, что остальные типы получаются, если мы "сожмем" этот (или последующие) многогранник вдоль направления некоторого ребра. Операция сжатия (или обратная ей операция "растяжения" вдоль направления некоторого ребра) будут играть в дальнейшем центральную роль.

Параллелоэдры подверглись внимательному изучению в течении более чем 100 лет, начиная с Минковского и Вороного. Была получена характеризация параллелоэдров (теорема Венкова). Был предложен (гипотетически универсальный) способ построения параллелоэдров как областей Дирихле-Вороного. Г.Вороной выдвинул гипотезу, что всякий параллелоэдр аффинно эквивалентен ячейке Дирихле-Вороного некоторой решетки. Были описаны параллелоэдры в размерности $\leqslant 4$. Однако многие вопросы еще остались. В частности, мы плохо еще представляем, как строить параллелоэдры. И чуть ли не единственная общая конструкция – это как раз упомянутое 'растяжение' (или обратное ему 'сжатие') параллелоэдра вдоль ребра (или вдоль некоторого "свободного" направления). Изучению такого растяжения и сжатия посвящены работы [1, 2, 3, 4].

Представим себе, что имеется параллелоэдр P, раздвигаемый (или свободный) в некотором направлении l. Это означает, что сумма (по Минковскому) P с некоторым (любым) нетривиальным отрезком, направленным вдоль l, тоже является параллелоэдром. Беря все более длинным наш отрезок, а в пределе всю прямую l, мы получим (бесконечный в направлении l) "параллелоэдр" $P+l$. Эквивалентно можно спроектировать все вдоль направления l ($\pi : V \to V/l$) и получить параллелоэдр $\pi(P)$ в факторпространстве V/l на единицу меньшей размерности. Настоящая работа посвящена обратной задаче: как и при каких условиях параллелоэдр P, расположенный в пространстве V, можно "поднять" до параллелоэдра $\widetilde{P}$ в пространстве $\widetilde{V}$ на единицу большей размерности. По другому можно сказать, что мы даем общую конструкцию параллелоэдров, свободных в некотором направлении.

Чтобы определить используемые нами понятия, в §2 мы рассматриваем женератрису произвольного разбиения пространства на полиэдры. Обращается внимание на то, что женератриса полностью определяется ее изломами на фасетах разбиения. Излом b_F на фасете F есть линейная функция, ядром которой является гиперплоскость, параллельная опорной к этой фасете гиперплоскости. Так как мы не предполагаем, что пространство V нормировано, то мы предпочитаем говорить о линейных функциях, а не о нормальных векторах (см. доказательство леммы 1). Подчеркнем, что в нормированном пространстве излом b_F однозначно определяет канонический нормальный вектор фасеты F.

В §3 рассматривается специальный случай разбиений Дирихле-Вороного относительно произвольного дискретного множества точек, метрика которого определяется положительной квадратичной формой. Отмечается, что если дискретное множество есть решетка L, то женератриса разбиения отличается от квадратичной формы, определяющей метрику, на L-периодическую функцию. Этот факт используется в дальнейшем в §8.

В §4 мы, в качестве примера, описываем ячейку Дирихле-Вороного (ДВ-ячейку) корневой решетки D_n. Ее проекция вдоль некоторого направления дает ячейку размерности на 1 меньше. Это показывает, что она есть поднятие своей проекции. Здесь же мы приводим три определяющих свойства параллелоэдра.

В следующем §5 мы даем простейшую конструкцию поднятия ДВ-ячейки, как ДВ-ячейку поднятой решетки. Делоне в своей работе [13] приводит эту конструкцию в качестве демонстрации его метода построения параллелоэдра смещения. Это есть наша *первая конструкция* поднятия параллелоэдра.

Для описание второй конструкции поднятия мы в §6 рассматриваем поднятие всего разбиения. Это есть слой параллелоэдров разбиения пространства на 1 большей размерности. Проекция этого слоя есть исходное разбиение. Определяется ламинарный подъем как подъем до ламинарного слоя и показывается, что ламинарный подъем определяется непрерывной многозначной функцией, определенной на исходном пространстве.

В §7 описывается вторая конструкция поднятия параллелоэдра. Она использует непрерывную многозначную функцию со свойствами функции ламинарного слоя, определенной в §6. Затем по этой функции строится однозначная волнообразная L-периодическая функция, которая в свою очередь однозначно определяет подъем параллелоэдра. Таким образом *вторая конструкция* состоит в построении волнообразной периодической функции.

§8 является основным результатом статьи. Здесь показывается, что эту волнообразную функцию можно построить по женератрисе. С другой стороны по волнообразной функции можно построить женератрису, правда с ограничением "общности" вектора сдвига. Иными словами, если сдвиг общий, то для поднятого параллелоэдра и его проекции существует женератриса, т.е. для обоих параллелоэдров справедлива гипотеза Вороного. Грубо говоря, верхняя шапочка поднятого параллелоэдра есть преобразованная женератриса его проекции.

В §9 формулируется и доказывается теорема 3. В ней приводятся 6 свойств параллелоэдра, каждое из которых эквивалентно тому, что этот параллелоэдр является поднятием параллелоэдра на 1 меньшей размерности.

Итак конструкция поднятия дает мощный, хотя и не универсальный способ получать параллелоэдры на единицу большей размерности. Не универсальный, потому что существуют параллелоэдры, не являющиеся поднятиями ни какого параллелоэдра.

§ 2. Разбиения

Пусть V – (конечномерное вещественное) векторное пространство, которое мы иногда будем понимать как аффинное пространство (забывая начало координат). *Разбиением* (или замощением) $\mathcal{T}$ этого пространства (или, быть может, некоторого подмножества в нем) называется семейство выпуклых полиэдров T, правильно разбивающих V. Правильно в том смысле, что если два полиэдра пересекаются, то они пересекаются по общей грани. Кроме того мы будем предполагать, что наше разбиение *локально конечно*, то есть каждая точка имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом полиэдров T. В основном нас будет интересовать тот случай, когда полиэдры T являются политопами, то есть ограничены.

Полиэдры T разбиения, имеющие полную размерность ($= \dim V$) называются *ячейками* разбиения. *Гранью* разбиения считается грань любой ячейки. *Фасетой* (или стенкой) разбиения называется грань коразмерности 1. Каждая такая стенка разделяет две ячейки, называемых соседними по этой фасете.

Вещественная непрерывная функция G на V называется *согласованной* с разбиением $\mathcal{T}$, если над каждой ячейкой T она аффинна. Последнее означает, что над ячейкой T она имеет вид $\alpha_T + c_T$, где α_T - линейная функция на V (то есть элемент двойственного пространства V^*), а c_T - константа.

Пусть теперь F – стенка нашего разбиения, которая разделяет ячейки T и T'. *Изломом* $b_F(G)$ функции G вдоль F мы называем разность $\alpha_T - \alpha_{T'}$. Линейная функция $b_F(G)$ обращается в нуль на гиперплоскости, которая параллельна аффинной гиперплоскости, опорной к F. Будем это записывать как $b \perp F$. Тут надо предостеречь, что излом b_F зависит не только от стенки, но и от ее 'ориентации' – переходим ли мы из T в T' или наоборот (когда излом меняется на противоположный). Если при переходе из T в T' излом b_F растет, мы говорим, что это *'вогнутый'* (или выпуклый вверх) излом; если наоборот - то *'выпуклый'* (или выпуклый вниз) излом. Вогнутость или выпуклость излома уже не зависят от ориентации и указывают на локальную вогнутость или выпуклость функции G вблизи F. Если излом b_F равен нулю, мы говорим, что функция G *не ломается* вдоль F (это эквивалентно тому, что G дифференцируема в точках F).

Линейные функции изломов G удовлетворяют следующему тривиальному *условию согласованности.* Пусть A - грань нашего разбиения коразмерности 2. К ней сходятся несколько ячеек $T_1, ..., T_k$, которые мы циклически упорядочим так что T_i соседствует с T_{i+1} по фасете F_i(и T_k соседствует с T_1). Тогда $\sum_{i=1}^k b_{F_i}(G) = 0$. Это и называется условием согласования изломов в грани A. Нетрудно проверить, что верно и обратное:

Предложение 1. *Пусть для каждой фасеты F разбиения $\mathcal{T}$ задана некая линейная функция излома b_F (удовлетворяющая, разумеется, условию ортогональности $b_F \perp F$). И пусть эти изломы согласованы в каждой грани коразмерности 2. Тогда существует функция G, согласованная с разбиением $\mathcal{T}$ и имеющая предписанные изломы. Функция G определена однозначно с точность до прибавления (глобальной) аффинной функции.*

С прицелом на дальнейшее мы сформулируем простое (и, несомненно, хорошо известное) утверждение.

Лемма 1. *Предположим, что в окрестности некоторой грани A коразмерности 2 наше разбиение устроено так, что через A проходят две трансверсальные гиперплоскости H_1 и H_2, и ячейки образованы из 4 квадрантов (см. рис. 2). Тогда изломы вдоль двух стенок, полученных из H_1 удалением A, равны. То же, конечно, верно и для стенок, полученных удалением A из H_2.*

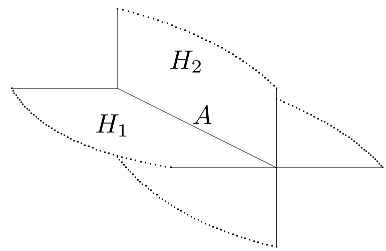

Рис. 2

Доказательство. Примем в качестве 0 точку из A. И пусть H_1 задается как множество нулей линейной функции p_1, а H_2 - как множество нулей линейной функции p_2. По определению излома излом над одной частью H_1 равен αp_1, над другой - βp_1. Аналогично изломы над частями H_2 равны γp_2 и δp_2. В силу условия согласованности линейная функция $\alpha p_1 + \gamma p_2 - \beta p_1 - \delta p_2 = (\alpha - \beta)p_1 + (\gamma - \delta)p_2$ равна 0. В силу линейной независимости p_1 и p_2 мы получаем $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$. $\square$

Если все изломы G (то есть вдоль всех стенок разбиения $\mathcal{T}$) выпуклы вниз, функция G является выпуклой (вниз). Если при этом все изломы ненулевые (то есть "строго выпуклы вниз"), мы говорим, что выпуклая функция G *строго согласована* с $\mathcal{T}$. Говорят также, что G является выпуклым изгибанием (подъемом) разбиения $\mathcal{T}$, или что G - (выпуклая) женератриса разбиения $\mathcal{T}$. Существование строго выпуклой женератрисы для заданного разбиения - весьма нетривиальный вопрос; некоторые результаты в этом направлении получены самим Вороным [5], а также Дэвисом [6] и Мак-Мюлленом [7].

§ 3. Разбиения Дирихле-Вороного

Приведем важную для дальнейшего иллюстрацию предыдущих понятий. Пусть пространство V снабжено положительной симметричной билинейной формой Q (то есть попросту – евклидовой структурой). В частности, можно говорить о расстоянии между точками V. И пусть в V задано дискретное подмножество L. Тогда возникает разбиение *Дирихле-Вороного* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(Q, L)$, ячейки которого параметризуются точками $l \in L$. А именно, ячейка $T(l)$ состоит из тех точек $x \in X$, которые расположены ближе к l, чем к любым другим точкам L. Иначе говоря, ячейка $T(l)$ состоит из таких точек $x \in V$, что $Q(x - l, x - l) \leqslant Q(x - l', x - l')$ для любого $l' \in L$, отличного от l. Если (временно) считать, что $l = 0$, мы получаем неравенства

$$Q(x, x) \leqslant Q(x - l', x - l') = Q(x, x) - 2Q(x, l') + Q(l', l'),$$

или

$$Q(x, l') \leqslant Q(l', l')/2.$$

Откуда видно, что ячейка $T(0)$ (а на самом деле - любая ячейка) - это выпуклый замкнутый полиэдр в V, возможно неограниченное и с бесконечным числом граней.

Легко понять, что это действительно разбиение. Эта же функция Q (а точнее, соответствующая квадратичная форма $q(x) = Q(x, x)$) задает и (выпуклую) женератрису для $\mathcal{T}$. Геометрически это выглядит так. Для каждой точки $l \in L$ рассмотрим касательную гиперплоскость (в пространстве $V \times \mathbb{R}$) к (графику) q в точке l. Это аффинная функция

$$a_l(x) = 2Q(l, x) - Q(l, l). \tag{3.1}$$

(Она имеет ту же производную, что и $q(x) = Q(x, x)$ в точке l, и равна q в точке l.) Очевидно, что $q \geqslant a_l$ (так как $Q(x, x) - 2Q(l, x) + Q(l, l) = Q(x - l, x - l) \geqslant 0$). В качестве женератрисы G мы берем супремум (максимум) семейства $(a_l, l \in L)$ этих аффинных функций; G автоматически выпукла. Пусть точка x принадлежит ячейке $T(l)$. Тогда $a_l(x) = -q(x - l) + q(x)$, тогда как для любой другой точки l' из L имеем $a_{l'}(x) = -q(x - l') + q(x)$. По определению ячейки $T(l)$ имеем $q(x - l) \leqslant q(x - l')$, так что $a_l(x) \geqslant a_{l'}(x)$ и $G(x) = a_l(x)$. То есть G совпадает с a_l над $T(l)$, и обратно. Так что G строго согласована с разбиением $\mathcal{T}$.

Эти вычисления указывают на тесную связь разбиений, квадратичных функций и женератрис. Эта связь становится наиболее тесной в том случае, когда L образует решетку.

Решеткой в V мы называем дискретную подгруппу полного ранга в V. (Впрочем, иногда мы применяем тот же термин к произвольному сдвигу 'групповой' решетки.) Имея такую решетку L (и положительную квадратичную функцию q, $q(x) = Q(x, x)$), мы снова можем образовать разбиение $\mathcal{T}$ и женератрису G (мы опускаем здесь указание на L и Q). Следствием 'однородности' L и Q является то, что разбиение $\mathcal{T}$ инвариантно относительно сдвига на векторы из решетки L, а женератриса G в следующем смысле трансляционно ковариантна: если $T_l G$ - функция, полученная из G сдвигом на вектор $l \in L$ (то есть $T_l G(x) = G(x - l)$), то $T_l G$ отличается от G прибавлением некоторой аффинной функции. В самом деле, пусть x принадлежит некоторой ячейке $T(l')$ нашего разбиения $\mathcal{T}$. Тогда, как мы видели выше, $G(x) = 2Q(l', x) - Q(l', l')$, тогда как

$$T_l G(x) = G(x - l) = 2Q(l' - l, x - l) - Q(l' - l, l' - l)$$

(потому что точка $x - l$ лежит в ячейке $T(l' - l)$), откуда $G(x) - T_l G(x) = 2Q(l', x) - Q(l', l') - 2Q(l', x) + 2Q(l', l) + 2Q(l, x) - 2Q(l, l) + Q(l', l') - 2Q(l', l) + Q(l, l) = 2Q(l, x) - Q(l, l)$. И мы видим, что эта разность не зависит от того, в какой ячейке лежит x, и равна аффинной функции a_l, см. (3.1).

Ячейки $T(l)$ этого разбиения (далее они называются *ячейками ДирихлеВороного* или *ДВ-ячейками*) получаются сдвигами одной из другой (более точно, $T(l)$ есть в точности сдвиг $T(0)$ на вектор l, $T(l) = T(0) + l$). Как легко понять, ячейки являются многогранниками. Нас главным образом будут интересовать фасеты такого разбиения и изломы соответствующей женератрисы G. Так как эти изломы тоже инвариантны относительно сдвига на векторы из решетки L, то можно ограничиться изучением изломов вдоль фасет центральной ячейки

$P = T(0)$. Заметим, что в силу инвариантности q и L относительно отражения ($x \mapsto -x$), наша ячейка $P = T(0)$ центрально симметрична (с центром симметрии в 0). Пусть F – фасета P; по другую сторону от нее P граничит с другой ячейкой $T(l)$, где $l \in L$. Отсюда видно, что фасета F тоже центрально симметрична (с центром симметрии в $l/2$). Так как женератриса G на ячейке $T(l)$ равна $a_l = 2Q(l, \cdot) - q(l)$, а на P она равна 0, то излом G вдоль фасеты F равен $Q(l, \cdot)$ (и выпуклый). Сама фасета F (а точнее, аффинная гиперплоскость, содержащая F) задается уравнением $Q(l, x) = q(l)/2$.

По (положительной) билинейной форме Q (и решетке L) мы строили женератрису G для разбиеня $\mathcal{T}$. Над ячейкой $T(l) = P + l$ женнератриса равна аффинной функции $2Q(l, x) - Q(l, l)$, см. (3.1).

Лемма 2. *Разность $q - G$ является L-периодической функцией на V.*

Доказательство. Проверим, что внутри каждой ячейки $T(l)$ эта разность зависит только от разности $r = x - l$ (но не от x и l). В самом деле, пусть $x \in T(l)$ и $x = l + r$. Тогда $q(x) - G(x) = Q(l + r, l + r) - 2Q(l, l + r) + Q(l, l) = Q(l, l) + 2Q(l, r) + Q(r, r) - 2Q(l, l) - 2Q(l, r) + Q(l, l) = Q(r, r)$. □

Векторы решетки L, соответствующие фасетам P, называются *фасетными.* Для фасеты F с центром симметрии c_F соответствующий фасетный вектор l_F равен $2c_F$. Из центральной симметрии P видно, что противоположный вектор $-l_F$ тоже фасетный.

Давайте взглянем на сказанное. Пусть разбиение $\mathcal{T}$, а значит и решетка L, фиксированы. Мы начинали с квадратичной формы q, по ней построили женератрису G, а по последней - трансляционно инвариантную систему изломов вдоль фасет разбиения. Разумеется, можно пройти и в обратном направлении. По системе изломов мы строим (как объяснялось выше) женератрису; в силу трансляционной инвариантности женератриса G будет трансляционно ковариантна. Более того, можно считать, что G тождественно нулевая на ячейке $T(0)$; тогда G определена однозначно. Наконец, G однозначно определяет квадратичную форму q, потому что мы знаем значения q во всех точках решетки L.

Мы здесь пользовались тем, что и разбиение $\mathcal{T}$, и женератриса G, были построены по форме q (или Q). На самом деле, женератриса G сама по себе (то есть независимо от ее происхождения) позволяет построить квадратичную функцию q. Дело вот в чем. Пусть снова мы начинаем с q и строим G. А теперь возьмем новую функцию G_r, такую что $G_r(x) = G(rx)/r^2$. Тогда в точке вида l/r (где $l \in L$) эта функция равна $G(l)/rr = q(l)/rr = q(l/r)$, то есть она совпадает с q во всех точках решетки $(1/r)L$. Точно также можно убедиться, что и производные совпадают. Одним словим, мы получаем, что функция q равна (поточеному или равномерному) пределу G_r при $r \to \infty$.

Таким образом мы заключаем, что квадратичная функция q, трансляционно ковариантная женератриса G или система изломов (b_F) (трансляционно инвариантная и согласованная) – это фактически одно и то же. Мы будем говорить про них, что это *условия Вороного* в форме *квадратичной функции, женератрисы, или изломов*, соответственно.

Предыдущие понятия (типа женератрисы или изломов) были введены для разбиения $\mathcal{T}$. Но так как разбиение целиком определяется ячейкой $P = T(0)$, то можно их переформулировать, упоминая только P (это в предвидении появления параллелоэдров). Вместо женератрисы можно говорить о "локальной женератрисе" определенной в окрестности P. А вместо системы изломов вдоль любых фасет разбиения можно ограничиться только фасетами P. Для них мы требуем две вещи:

1) изломы вдоль противоположных фасет противоположны, и

2) их согласованность при продолжении сдвигами на векторы из L.

§ 4. Параллелоэдры

Пусть $\mathcal{T}$ – разбиение пространства V. Скажем, что $\mathcal{T}$ – *параллелоэдральное* разбиение, если все его ячейки получаются друг из друга с помощью параллельного сдвига. В частности, все ячейки одинаковы (с точностью до сдвига); многогранники такого вида называются *параллелоэдрами.* Любое параллелоэдральное разбиение с ячейкой P мы обозначаем как $\mathcal{T}(P)$; ясно, что оно определено с точностью до сдвига. Примеры параллелоэдров доставляют ячейки Дирихле-Вороного и гипотетически они дают все параллелоэдры.

Фиксируем некоторый начальный параллелоэдр P разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(P)$. Любая другая ячейка Q получается из P сдвигом на некоторый вектор l_Q пространства V. Легко понять, что множество таких векторов образует (дискретную) подгруппу в V. Мы обозначаем ее $L(P)$ или $L(\mathcal{T})$ и называем *трансляционной решеткой* параллелоэдрального разбиения $\mathcal{T}$.

Пример 1. Мы хотим проиллюстрировать сказанное на примере одной серии параллелоэдров, которые обозначим как $P_n = P(D_n)$. Очевидно, что (единичные) кубы разбивают пространство $\mathbb{R}^n$; это не слишком интересное разбиение. Однако с его помощью можно построить более интересные параллелоэдры.

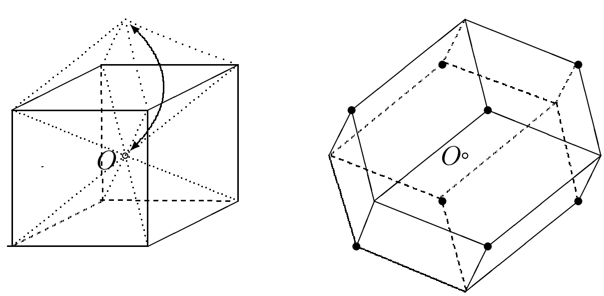

Рис. 3

(На рис. 3 слева изображен куб, пирамиды, сходящиеся к центру O, и 'выворачивание' верхней пирамиды. Справа нарисован полученный в результате выворачивания всех пирамид параллелоэдр P_3. Читатель должен постараться увидеть на правом рисунке 'старый' куб и шесть октаэдров, сходящихся к центру P_3. Для удобства вершины старого куба отмечены как жирные точки.)

Приведенная на рис.3 конструкция легко переносится на случай любого n. Мы начинаем с куба C_n в $\mathbb{R}^n$, заданного неравенствами $-1/2 \leqslant x_i \leqslant 1/2$; центр его в точке $O = (0, ..., 0)$, а вершины имеют вид $(\pm 1/2, ..., \pm 1/2)$. Здесь координаты заданы в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. У куба C_n $2n$ фасет-кубов, получающихся фиксацией некоторой координаты на значении $1/2$ или $-1/2$. Такую фасету обозначим как $F_i^{\pm}$. Если мы соединим все точки этой фасеты с O, мы получим пирамиду $\Pi_i^{\pm}$. 'Вывернем ее наизнанку', то есть отразим относительно основания, и добавим к кубу. Если мы проделаем так с каждой фасетой, мы получим (выпуклый) многогранник P_n. Его вершины делятся на две группы. Первая - вершины вида $\pm e_i$; их $2n$ штук; это вершины, полученные из O отражениями относительно фасет $F_i^{\pm}$ нашего исходного куба. И еще 2^n вершин нашего исходного куба.

Легко понять, что P_n является параллелоэдром. И легко убедиться, что P_n – это ячейка Дирихле-Вороного $P(D_n)$ для корневой решетки $D_n = \mathbb{Z}\mathbf{D}_n$, целочисленно порожденной системой корней $\mathbf{D}_n$ (при $n \geqslant 3$; для $n = 2$ мы должны считать, что $\mathbf{D}_2 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1$). Такое описание ячейки $P(D_n)$ хорошо известно; см. [8], [9]. Фасеты P_n имеют вид бипирамид с вершинами $\pm e_i$ и $\pm e_j$ ($i \neq j$, знаки произвольны) и основаниями - гранями куба коразмерности 2 (с центрами в точках $\pm e_i/2 \pm e_j/2$). Целые вершины ДВ-ячейки решетки D_n суть концевые точки $2n$ векторов $\pm e_i$, где $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$. Если $n \geqslant 3$, то дробные вершины суть концевые точки 2^n векторов

$$v_S = e(S)/2 - e(N \backslash S)/2, \text{ где } e(S) = \sum_{i \in S} e_i \text{ для } S \subseteq N.$$

Попросту говоря, это точки вида $(\pm 1/2, ..., \pm 1/2)$.

Параллелоэдры P_n (при разных n) тесно связаны друг с другом. Возьмем, к примеру, P_n и спроектируем вдоль 'вертикальной' координаты x_n; мы получим в точности P_{n-1}. Более того, поделим все фасеты P_n на фасеты 'верхней шапочки', 'нижней шапочки' и 'боковые' фасеты. Первые образованы фасетами, имеющими в качестве вершины точку $e_n = (0, ..., 0, 1)$; их $2(n-1)$ штук. Вторые содержат вершину $-e_n$. Наконец, остальные параллельны вертикальной прямой (n-й координатной оси), и они проектируются в точности в фасеты P_{n-1}. Заметим (на будущее), что фасеты верхней шапочки P_n проектируются в точности на бипирамиды, из которых составлен многогранник P_{n-1} (вспомним его построение из куба).

Эта обстоятельство (в более общей обстановке) будет обсуждаться в последующих разделах. □

Приведем три важнейших (характеризующих) свойства параллелоэдров. Первое из них, впервые открытое Минковским, это

(PH1) *Параллелоэдр P центрально симметричен.*

Как правило, мы помещаем центр симметрии P в начало координат векторного пространства V. В этом случае трансляционная решетка L отождествляется с решеткой центров всех ячеек разбиения $\mathcal{T}$.

Второе свойство параллелоэдров, тоже отмеченное Минковским, легко следует из первого:

(PH2) *Любая фасета параллелоэдра центрально симметрична.*

На самом деле можно сказать чуть больше. Назовем грань A параллелоэдра P *контактной*, если она есть пересечение P с некоторой другой ячейкой Q разбиения $\mathcal{T}(P)$. Впервые на контактные грани обратил внимание Н.П.Долбилин (см., например, [10]). Он назвал их *стандартными* и подробно изучил их свойства. Название контактная грань предложил Роберт Эрдал, так как это название более соответствует сути грани.

Любая фасета является контактной гранью, и *любая контактная грань центрально симметрична.* Доказательство последнего факта несложно и его можно найти в [10].

Для любой контактной грани A мы через l_A обозначаем вектор $2c_A$, где c_A - центр симметрии A. Очевидно, что по грани A параллелоэдр P может контактировать не более чем с одним другим параллелоэдром Q, а именно, с $Q = P + l_A$. Но сама контактная грань может быть пересечением нескольких пар параллелоэдров.

Пример 2. Для точки z решетки D_n обозначим через $P_n(z)$ ДВ-ячейку с центром в точке z. Все целые вершины многогранника $P_n = P_n(0)$ суть контактные грани. Например,

$$e_i = P_n(0) \cap P_n(2e_i) = P_n(e_i + e_k) \cap P_n(e_i - e_k) \text{ для всех } k \in N,\ k \neq i.$$

Если $n = 2m$ четно, то $2v_S \in D_n$. Поэтому в этом случае все дробные вершины тоже суть контактные грани. $\square$

Третье фундаментальное свойство параллелоэдров относится к граням коразмерности 2. Пусть A – такая грань параллелоэдра P; рассмотрим схождение ячеек в этой грани. Вокруг A в циклическом порядке идут ячейки $P = P_0, P_1, ..., P_r, P_0$. Оказывается, что r может быть либо 3, либо 4. Более точно:

(PH3) *Либо $r = 3$ (и тогда грань A примитивная), либо $r = 4$ (и тогда грань A – контактная и противоположные фасеты параллельны).*

Напомним, что грань коразмерности k произвольного разбиения на многогранники *примитивна*, если в ней сходятся $k+1$ ячеек разбиения.

Простое доказательство свойства (PH3) можно найти в разделе 3 статьи Долбилина [10].

Обычно свойство (PH3) формулируют в терминах только многогранника P. Для этого используется понятие *пояска*, связанного с гранью A коразмерности 2. Пусть F_1 - фасета, примыкающая к A. В силу ее симметричности, у нее есть грань A_1, противоположная A. К A_1 примыкает новая фасета F_2 и новой противоположной гранью A_2. И так далее, пока через четное число шагов мы не вернемся к A (с другой, нежели F_1, фасеты F_{2r}). Легко видеть из (PH3), что либо $r = 3$ (и тогда говорят про 6-поясок), либо A контактная грань, $r = 2$ и тогда говорят про 4-поясок. Так вот, обычно свойство (PH3) формулируют как утверждение, что пояски, связанные с гранями коразмерности 2, являются 4- или 6-поясками.

Интерес свойств (PH1-PH3) в том, что они характеризуют параллелоэдры.

Теорема 1 (Венков [11]). *Выпуклый многогранник является параллелоэдром тогда и только тогда, когда он обладает свойствами (PH1-PH3) (последнее - в форме поясков).*

Вернемся к трансляционной решетке $L = L(P)$. Как уже говорилось, она содержит фасетные векторы l_F, где F пробегает фасеты параллелоэдра P. И даже порождается этими векторами. Конечно, фасетные векторы l_F не образуют базис абелевой группы L. Например, если фасета G противоположна фасете F (то есть $G = -F$; мы тут считаем, что центр P расположен в нуле пространства V), то $l_G = -l_F$. Аналогичное соотношение возникает при рассмотрении 6-поясков. Если фасеты F, G, H входят в 6-поясок и идут по кругу в указанном порядке, то выполнено 3-соотношение $l_G = l_F + l_H$. Оказывается, что это все соотношения между фасетными векторами. Сформулируем это как утверждение, новое разве что формулировкой:

Предложение 2. *Группа L изоморфна факторгруппе свободной абелевой группы, порожденной фасетными векторами l_F, когда F пробегает фасеты P, по указанным выше 2- и 3-соотношениям.*

Мы лишь наметим доказательство этого утверждения. Пусть сумма некоторого набора l_{F_1}, l_{F_2}, ..., l_{F_r} фасетных векторов равна 0 в группе L. Приставляя последовательно друг к другу эти вектора, мы получаем 'комбинаторный путь', который начинается в 0 и заканчивается в 0. В силу односвязности пространства V этот комбинаторный цикл стягивается в точку; более точное утверждение (см., например, [12; §44]) состоит в том, что этот цикл можно представить как соединение 'элементарных' циклов, соответствующих либо хождению туда и обратно по некоторому ребру, либо обходу 'вокруг' некоторой грани разбиения коразмерности 2. Циклы первого вида соответствуют 2-соотношениям. Обходы вокруг грани, порождающей 6-поясок, соответствуют 3-соотношениям. Обход же вокруг грани, порождающей 4-поясок, автоматически дает 0 в силу 2-соотношений (потому что имеет вид $l_F + l_G + l_{-F} + l_{-G}$). □

На это простое свойство, кстати, опираются многие рассуждения при доказательстве гипотезы Вороного. Предположим, что мы для каждой фасеты F исходного параллелоэдра P подобрали такой линейный функционал $p_F : V \to \mathbb{R}$, задающий F (в том смысле, что фасета F параллельна ядру p_F), причем система этих функционалов p_F удовлетворяет всем тройным соотношениям для каждого 6-пояска. (В этом случае, следуя Вороному, говорят о *канонической* определенности разбиения.) Нетрудно показать с помощью Предложения 2, что можно построить (трансляционно ковариантную) женератрису и тем самым подходящую квадратичную форму, которая (вместе с решеткой $L \subset V$) представляет наш параллелоэдр P как многогранник Дирихле-Вороного. Трудность как раз в том, чтобы 'канонически' подобрать функционалы p_F.

§ 5. Поднятие параллелоэдра: первая конструкция

Ниже мы опишем способ строить по параллелоэдру P новый параллелоэдр $\widetilde{P}$ на единицу большей размерности ('поднятие' P). Этим способом пользовался Делоне [13], чтобы построить все 4-мерные параллелоэдры, исходя из 3-мерных.

Подъем можно осуществлять двумя конструкциями, по видимости довольно различными, но, как мы увидим позже, тесно связанными. Мы представляем, что параллелоэдр P (как и разбиение $\mathcal{T}$ и решетка L) лежат в 'горизонтальном' пространстве V. Мы добавляем еще одну 'вертикальную' размерность, то есть образуем пространство $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}$, в котором новая ось $\{0\} \times \mathbb{R}$ идет 'вертикально'. Проекция $\pi : \widetilde{V} \to V$ вдоль этой оси переводит точку $(v,t) \in \widetilde{V}$ в точку v. Именно в этом расширенном пространстве $\widetilde{V}$ мы и будем строить 'подъем' P, то есть параллелоэдр $\widetilde{P}$, который проектируется на P, $\pi(\widetilde{P}) = P$.

Построение начинается с задания новой решетки $\widetilde{L}$ в $\widetilde{V}$, которая окажется трансляционной решеткой для $\widetilde{P}$. Для этого мы к старой решетке L (которая лежит в горизонтальной гиперплоскости $V \subset \widetilde{V}$) добавляем одну новую образующую $(v,h) \in \widetilde{V}$, где $v \in V$, а h – число, строго большее 0. Число h мы называем *высотой*, а v – *вектором сдвига.* Без ограничения общности можно считать, что $v \in P$. Так что новая решетка $\widetilde{L}$ расположена слоями, из которых нулевой слой (в точности L) расположен на высоте 0, первый слой - на высоте h и сдвинут на вектор v относительно нулевого слоя, и так далее.

Замечание. Подъем решетки до решетки размерности на единицу большей использовался в разных работах в некоторых конструкциях. Например, так строятся *слоистые* решетки в [14], гл.6. Барановский в статье [15] этим способом строит совершенные решетки, исходя из совершенных решеток размерности на 1 меньшей. Во всех случаях в качестве вектора сдвига выбирался вектор с концом в вершине v параллелодра исходной решетки. Обычно в этих конструкциях высота h однозначно определяется условием, чтобы норма v^2+h^2 новых векторов вида (v,h) равнялась минимальной норме исходной решетки. Подробности см. в [15]. Почти всегда в этом случае ДВ-ячейка поднятой решетки не является поднятием ДВ-ячейки исходной решетки, вернее, проекция первой ячейки не дает вторую.

При первом способе мы предполагаем, что параллелоэдр P является многогранником Дирихле-Вороного для решетки L и некоторой симметричной билинейной формы Q на V. Мы продолжаем эту форму Q на $\widetilde{V}$ до формы $\widetilde{Q}$, задавая последнюю формулой:

$$\widetilde{Q}((x,t),(y,s)) = Q(x,y) + \alpha ts,$$

где α - некоторое положительное число. После этого определяем $\widetilde{P}$ как многогранник Дирихле-Вороного для решетки $\widetilde{L}$ и этой формы $\widetilde{Q}$. Очевидно, что $\pi(\widetilde{P}) \subset P$. Если число h достаточно большое, то $\pi(\widetilde{P}) = P$, так как в этом случае не вертикальные фасеты не отрезают вершины P (ср. [13], стр. 82).

Пример 3, не самый интересный. Пусть вектор сдвига $v = 0$. Тогда (при любом $\alpha > 0$) $\widetilde{P} = P \times [-h/2, h/2]$ – призма с основанием P и высотой h.

Пример 4. Более интересный пример подъема дают параллелоэдры P_n, рассмотренные в Примере 1 предыдущего раздела. P_n является подъемом P_{n-1} вдоль вектора e_n. Высота h этого подъема равна длине вектора e_n, а в качестве вектора сдвига можно взять вектор e_j для любого j такого, что $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

Проекция многогранника P_n вдоль направления вектора $e(N) = (1, ..., 1)$, дает новый параллелоэдр. В самом деле, трансляционная решетка для спроектированного параллелоэдра порождена векторами вида $\pm e_i \pm e_j$, лежащими в гиперплоскости "сумма координат равна 0", то есть векторами вида $\pm(e_i - e_j)$. А это как раз корни системы $\mathbf{A}_{n-1}$. Так что эта проекция дает ДВ-ячейку для корневой решетки A_{n-1}, порожденной системой корней $\mathbf{A}_{n-1}$.

Приглядимся внимательнее к поднятому параллелоэдру $\widetilde{P}$, точнее, к его границе и его фасетам. Видно, что у него есть 'боковые', или 'вертикальные' (то есть параллельные вертикальному направлению) фасеты, соответствующие фасетам исходного P. Но кроме того у него есть "верхняя шапочка" , состоящая из фасет с центрами на высоте $h/2$ (так как расстояние между слоями равно h), и симметричная ей "нижняя шапочка".

Фиксируя вектор сдвига v и варьируя α и h, мы получаем двухпараметрическое семейство поднятых параллелоэдров $\widetilde{P}$ (все они проектируются на P). Легко понять, что если мы заменим h на $h + \varepsilon$ $(\varepsilon \geqslant 0)$, а α на $\alpha h/(h + \varepsilon)$, мы получим параллелоэдр вида $\widetilde{P} + I$, где I - вертикальный отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Иначе говоря, параллелоэдр $\widetilde{P}$ *свободен* в вертикальном направлении.

Второе свойство параллелоэдра $\widetilde{P}$, которое бросается в глаза – это то, что если мы рассмотрим семейство параллелоэдров $\widetilde{P} + l$, где l пробегает L (здесь решетка L рассматривается как 'нулевой горизонтальный слой' решетки $\widetilde{L}$), мы получим 'плотный горизонтальный слой', 'брусчатку', или *ламину.*

Обычно под *ламиной* понимается такой слой параллелоэдров $\{\widetilde{P}+l:\ l \in L\}$, что каждый его параллелоэдр смежен по фасете либо с параллелоэдром своего слоя, либо с параллелоэдрами соседних слоев $\{\widetilde{P}+l:\ l \in L \pm (v, h)\}$. Описание такого свойства подрешетки L коразмерности 1 решетки параллелоэдрального разбиения имеется в работе С.С.Рышкова и Е.П.Барановского [16] (§9, стр. 55). Авторы этой работы называют плоскость, натянутую на L, *слоевой* и в Лемме 9.3 описывают основное ее свойство, эквивалентное выше приведенному определению ламины.

Плотность ламины означает следующее. Если удалить из пространства разбиения все параллелоэдры ламины, то пространство распадется на две не связные компоненты. Так определяется ламина в [17]. В теореме 6 статьи [17] упомянуто свойство ламины, эквивалентное данному выше ее определению. Но в формулировке этой теоремы должно вместо слов relevant vector быть facet vector. Это же свойство решетки ламины примитивного параллелоэдра отметил Б.Венков в теореме 2 статьи [1].

Так как понятие ламины далее широко используется, стоит поговорить об этом подробнее.

§ 6. Подъем разбиения

Воспользуемся обозначениями предыдущего раздела.

Пусть $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ – параллелоэдральные разбиения в пространствах V и $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}$, P и $\widetilde{P}$ – их ячейки с центрами в начале координат, а L и $\widetilde{L}$ – соответствующие трансляционные решетки. *Подъемом разбиения* $\mathcal{T}$ в $\widetilde{\mathcal{T}}$ мы называем семейство $\widetilde{\mathcal{T}}_0 = (\widetilde{T}(\widetilde{l}),\ \widetilde{l} \in \widetilde{L}_0)$ ячеек разбиения $\widetilde{\mathcal{T}}$, такое что

1) $\widetilde{L}_0$ является подгруппой в $\widetilde{L}$, которая изоморфно проектируется на L;
2) проекция $\pi(\widetilde{P})$ параллелоэдра $\widetilde{P}$ совпадает с P.

На рис. 4 приведены два простых примера подъемов одномерного разбиения.

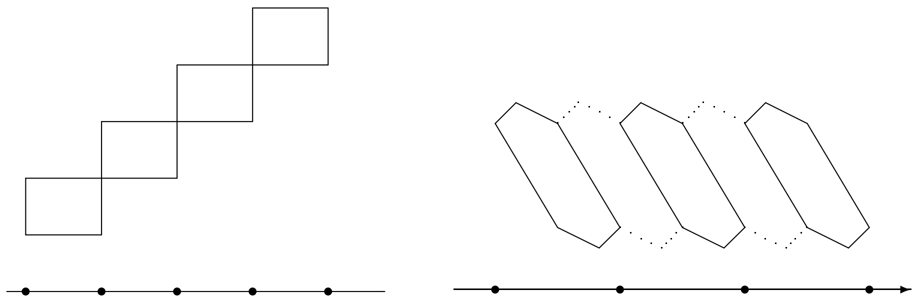

Рис. 4

Телом подъема мы называем объединение $|\widetilde{\mathcal{T}}_0| = \bigcup_{\widetilde{l}\in\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(\widetilde{l})$. Из определения подъема разбиения вытекает, что тело подъема сюръективно проектируется на V. В самом деле, проекция тела равна

$$\pi(\bigcup_{\widetilde{l}\in\widetilde{L}_0}\widetilde{T}(\widetilde{l})) = \bigcup_{\widetilde{l}\in\widetilde{L}_0}\pi(\widetilde{T}(\widetilde{l})) \overset{\text{свойство 2)}}{=\!=} \bigcup_{\widetilde{l}\in\widetilde{L}_0}T(\pi(\widetilde{l})) \overset{\text{свойство 1)}}{=\!=} \bigcup_{l\in L}T(l) = V.$$

Поэтому тело $|\widetilde{\mathcal{T}}_0|$ можно рассматривать как график многозначной функции f из V в $\mathbb{R}$. Подъем называется *ламинарными* (а его тело *ламиной*), если

3) эта многозначная функция f непрерывна.

В данном случае непрерывность означает, что верхняя и нижняя кромки тела подъема суть обычные непрерывные функции.

Приведенные на рис. 4 подъемы неламинарны. Ламинарный подъем показан на рис. 5.

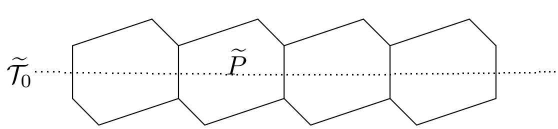

Рис. 5

Легко видеть, что подъем разбиения $\mathcal{T}$ как нулевого слоя $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ дает именно ламину, определенную в предыдущем разделе (ведь ДВ-ячейка есть параллелоэдр).

Так как над внутренностью каждой ячейки $T(l)$ разбиения $\mathcal{T}$ наша многозначная функция непрерывна, то разрывы могут возникать только на стыках ячеек, то есть на их границе. И в первую очередь на фасетах разбиения $\mathcal{T}$. Пусть мы имеем две соседних (по фасете F) ячейки P и Q разбиения $\mathcal{T}$. Тогда можно двумя способами поднять F в $\widetilde{V}$: как прообраз F в ячейке $\widetilde{P}$ ($\widetilde{P}$ над P), обозначим его $\widetilde{F}_P$, и как прообраз F в ячейке $\widetilde{Q}$ ($\widetilde{Q}$ над Q), обозначим его

$\widetilde{F}_Q$. Так вот непрерывность означает, что мы получим одно и то же, то есть $\widetilde{F}_P = \widetilde{F}_Q$. В общем же случае эти подъемы фасеты F могут отличаться, как видно на рисунке 4. Однако справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Многогранник $\widetilde{F}_P$ совпадает с $\widetilde{F}_Q$ с точностью до сдвига на некоторый вертикальный вектор.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{Q}$ получается из $\widetilde{P}$ сдвигом на вектор $\widetilde{l} \in \widetilde{L}_0$. Тогда очевидно, что $\widetilde{F}_Q$ получается сдвигом на тот же вектор $\widetilde{l}$ противоположной к $\widetilde{F}_P$ грани $\widetilde{P}$, которую можно обозначить как $-\widetilde{F}_P$. Решающим тут оказывается то обстоятельство, что грань $\widetilde{F}_P$ центрально симметрична. В самом деле, если размерность $\widetilde{F}_P$ больше, чем размерность ее проекции F, то $\widetilde{F}_P$ является фасетой $\widetilde{P}$ и потому центрально симметрична. Если же размерность такая же, то $\widetilde{F}_P$ аффинно изоморфна F, но F - фасета параллелоэдра P и тоже центрально симметрична.

Таким образом, грань $-\widetilde{F}_P$, а значит и $\widetilde{F}_Q$, получается из $\widetilde{F}_P$ сдвигом. То, что этот сдвиг вертикальный, видно из того, что проекции $\widetilde{F}_P$ и $\widetilde{F}_Q$ в вертикальном направлении совпадают (равны F). $\square$

Если обозначить этот вертикальный сдвиг (точнее, его величину) как $j(P,Q)$, 'скачок' поднятия $\widetilde{\mathcal{T}}_0$ при переходе от ячейки P к соседней ячейке Q, то ясно, что *поднятие является ламиной тогда и только тогда, когда все эти скачки равны нулю.* В общем случае эти скачки задают гомоморфизм из L в $\mathbb{R}$. Более точно, будем считать, что P – 'центральная' ячейка разбиения $\mathcal{T}$, и для каждого фасетного вектора l_F определим $j(l_F)$ как скачок от P к соседней ячейки $Q = P + l_F$.

Следующая лемма будет нужна при доказательстве Теоремы 3.

Лемма 4. *Функция j, заданная на фасетных векторах, продолжается до гомоморфизма из L в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Очевидно, что $j(-l_F) = -j(l_F)$ для любой фасеты параллелоэдра P. Мы утверждаем, что если P, Q и R - три ячейки разбиения $\mathcal{T}$, сходящиеся к грани A коразмерности 2, то $j(P,Q) + j(Q,R) + j(R,P) = 0$. Это видно из рисунка 6

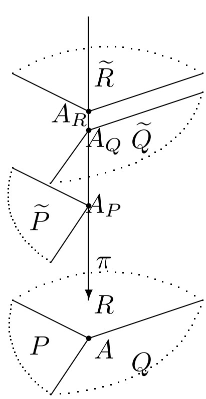

Рис. 6

и замечания, что скачок от P к Q равен сдвигу от A_P к A_Q и аналогично для скачков от Q к R и от R к P. На этом рисунке мы предполагали, что прообраз грани A имеет ту же размерность, что и A. Однако то же рассуждение проходит и тогда, когда A поднимается до фасет разбиения $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Остается воспользоваться Предложением 2. □

§ 7. Поднятие параллелоэдра: вторая конструкция

Вернемся к ламинарному подъему $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{T}}_0$, рассмотренному в предыдущем разделе. Без ограничения общности можно предполагать, что подрешетка $\widetilde{L}_0$ лежит в "горизонтальной" гиперплоскости $V \subset \widetilde{V}$ и совпадает с L. Для каждой точки $x \in V$ можно рассмотреть прообраз $\widetilde{\mathcal{L}}_x = \{(x,t) \in |\widetilde{\mathcal{L}}|\}$. Так как в силу ламинарности функция f непрерывна, то $\widetilde{\mathcal{L}}_x$ есть непустой отрезок $[f_l(x), f_u(x)]$ в $\mathbb{R}$, который непрерывно зависит от x. В частности, мы получаем две непрерывные функции f_l и f_u на V, $f_l \leqslant f_u$, таких, что тело ламины задается как

$$|\widetilde{\mathcal{L}}| = \{(x,t) \in V \times \mathbb{R}, f_l(x) \leqslant t \leqslant f_u(x)\}. \tag{7.1}$$

Функции f_l и f_u задают 'нижнюю кромку' и 'верхнюю кромку' ламины $\widetilde{\mathcal{L}}$. Очевидно, что они L-периодические. Кроме того, $f_l(x) = -f_u(-x)$ для любого $x \in V$, что следует из центральной симметрии $\widetilde{P}$ (и всей ламины $\widetilde{\mathcal{L}}$). Наконец, при сдвиге на вектор (v,h) решетки $\widetilde{L}$ 'нижняя кромка' ламины переходит в 'верхнюю кромку'. Это дает соотношение:

$$f_u(x) = f_l(x-v) + h. \tag{7.2}$$

Еще одно свойство этих функций проистекает из того, что над P (как и над любой ячейкой разбиения $\mathcal{T}$) функция f_u вогнута (как верхняя кромка-шапочка выпуклого многогранника $\widetilde{P}$). На самом деле, как легко понять, функция f_u кусочно линейна. Области линейности (аффинности) тоже легко описать: это так называемые *куски*, то есть пересечения ячеек $T(l)$ исходного разбиения $\mathcal{T}$ с ячейками $T(l') + v$ сдвинутого разбиения $\mathcal{T} + v$.

Эти свойства функций f_u и f_l подсказывают второй способ конструирования подъема $\widetilde{P}$ (при фиксированных h и v). Представим себе, что у нас есть две функции f_u и f_l на V, причем $f_l(x) = -f_u(-x)$ для любого $x \in V$, которые

a) непрерывные и L-периодические,

b) f_u вогнутая над P,

c) выполнено равенство $f_u(x) = f_l(x-v) + h$ для любого $x \in V$, и

d) выполнено неравенство $f_u(x) \geqslant f_l(x)$ для любого $x \in V$.

Положим

$$\widetilde{P} = \{(x,t) \in \widetilde{V},\ x \in P,\ f_l(x) \leqslant t \leqslant f_u(x)\}.$$

В силу b) (и равенства $f_l(x) = -f_u(-x)$) множество $\widetilde{P}$ является выпуклым телом. В силу d) $\widetilde{P}$ проектируется на P. В силу a) сдвиги $\widetilde{P}$ на элементы решетки L образуют ламину; если добавить сдвиги на векторы, кратные (v,h), то в силу c) сдвиги $\widetilde{P}$ на векторы из $\widetilde{L}$ заполняют (и разбивают) все пространство $\widetilde{V}$. Отсюда видно, что $\widetilde{P}$ - параллелоэдр с трансляционной решеткой $\widetilde{L}$. Правда, чтобы получить нормальное разбиение (то есть грань в грань), надо потребовать еще, чтобы f_u была строго вогнута в определенном ранее смысле, то есть 'ломалась' при пересечении стенок определенных выше кусков. Заметим, что фасеты верхней и нижней шапочек параллелоэдра $\widetilde{P}$ суть прообразы этих кусков.

Из этой второй конструкции также видно, что параллелоэдр $\widetilde{P}$ свободен в вертикальном направлении. В самом деле, чтобы прибавить к $\widetilde{P}$ вертикальный отрезок $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$, достаточно прибавить ε к f_u и вычесть ε из f_l. Высота h при этом заменяется на $h + 2\varepsilon$.

Соотношение $f_l(x) = -f_u(-x)$ показывает, что функции f_u и f_l выражаются друг через друга и можно было бы ограничиться одной из них, например, функцией f_u. Она L-периодическая и колеблется вокруг среднего значения $h/2$. Поэтому более естественно перейти к функции $f = f_u - h/2$, которая уже колеблется вокруг 0. Функция f_u получается тогда как $f + h/2$, а $f_l(x) = -f(-x) - h/2$. Нужные свойства f формулируются так:

a) функция f непрерывная и L-периодическая,

c) $f(x) + f(v - x) = 0$,

d) $f(x) + f(-x) \geqslant -h$.

Самое главное свойство это следующее свойство

b) f вогнута над P и ломается внутри P при пересечении любой фасеты сдвинутого разбиения $\mathcal{T} + v$.

Отсюда видно, что f линейна (аффинна) над каждым куском, то есть над пересечением P с ячейками вида $T + v$, где T - ячейки разбиения $\mathcal{T}$. Функцию f со свойствами a), b) и c) мы называем *волнообразной*.

Отметим также, что функция f нечетна относительно любой точки вида $c = l/2 + l'/2$, где $l \in L$, $l' \in L' = L + v$. То есть при отражении относительно такой точки f меняет знак. Иначе говоря, что для любого вектора x выполнено соотношение $f(c + x) + f(c - x) = 0$. (В частности, в каждой такой точке c функция f обращается в нуль.) В самом деле, обозначая $c + x$ через y, мы должны проверить равенство $f(y) + f(2c - y) = 0$. Но $2c = l + l' = l'' + v$, где $l'' \in L$. Пользуясь L-периодичностью, мы получаем, что $f(2c - y) = f(v - y)$, и теперь все следует из c), т.е. из равенства $f(y) + f(v - y) = 0$.

Подытоживая, можно сказать, что задание волнообразной функции f позволяет построить поднятие параллелоэдра P (если взять подходящую высоту h, см. условие d)). Поэтому определим *поднятие* или *подъем* параллелоэдра как параллелоэдр, который можно получить из его проекции с помощью второй конструкции. Снова заметим, что вторая конструкция применима и к ДВ-ячейкам, поскольку они суть параллелоэдры.

§ 8. Связь с женератрисой

Казалось бы, вторая конструкция предпочтительнее первой, так как не апеллирует к условию Вороного. Однако это только кажется. Дело в том, что существование волнообразной функции f, особенно с учетом требования строгой вогнутости, фактически эквивалентно существованию женератрисы для разбиения $\mathcal{T}(P)$. Скажем про это несколько слов.

Построение f по женератрисе. Пусть условие Вороного для параллелоэдра P задано билинейной формой Q. Тогда, как говорилось выше, можно определить женератрису G разбиения $\mathcal{T}$, которая над ячейкой $T(l) = P + l$ ($l \in L$) задается равенством (3.1)

$$G(x) = 2Q(l, x) - Q(l, l).$$

Кроме того, образуем 'сдвинутую' женератрису G', $G'(x) = G(x - v)$. Она является женератрисой для сдвинутого на вектор v разбиения $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + v$. Если мы образуем разность $G - G'$, то получим все нужные свойства f, кроме периодичности. Чтобы исправить этот недостаток, мы добавляем подходящую аффинную функцию. Окончательно полагаем

$$f(x) = G(x) - G'(x) - 2Q(v, x) + Q(v, v).$$

Предложение 3. *Построенная выше функция f удовлетворяет условиям a), b) и c).*

Доказательство. a) Непрерывность f очевидна. Чтобы проверить L-периодичность, мы заметим, что G отличается от квадратичной функции q на периодическую (Лемма 2). Аналогично G' отличается на периодическую функцию от сдвинутой квадратичной функции q', $q'(x) = q(x - v)$. Теперь все следует из того, что $q(x) - q'(x) = 2Q(v, x) - Q(v, v)$. В самом деле, $q'(x) = Q(x - v, x - v) = Q(x, x) - 2Q(x, v) + Q(v, v)$.

c) Проверим, что $f(x) + f(v - x) = 0$. Вычисляем: $G(x) - G'(x) - 2Q(v, x) + Q(v, v) + G(v - x) - G'(v - x) - 2Q(v, v - x) + Q(v, v) = G(x) - G(x - v) + G(v - x) - G(v - x - v) - 2Q(v, v) + 2Q(v, v) = G(x) - G(-x) - G(x - v) + G(v - x) = 0$. Последнее равенство следует из того, что G – четная функция, так что $G(y) = G(-y)$.

b) Вогнутость f над P видна из того, что функция $G(\cdot) - 2Q(v, \cdot) + Q(v, v)$ аффинна над P. Так что f вогнута как функция $-G'$, потому что G' – выпукла. Утверждение про изломы также отсюда следует. $\square$

Построение женератрисы по волнообразной функции f. Функция f, удовлетворяющая условиям a)-c), позволяет восстановить (построить) женератрису G, для которой $f = G - G' +$ аффинная добавка. Чтобы элиминировать "неизвестную" аффинную добавку, удобнее работать с изломами функций f и G, так как они не замечают аффинные добавки. Видно, что изломы функции f вдоль фасет параллелоэдра P равны изломам функции G (а именно они и нужны, чтобы определить женератрису), если только на них не накладываются изломы функции G'. Чтобы гарантировать, что изломы G' не накладываются на фасеты P, мы добавляем условие общности вектора сдвига v.

Заметим, что векторы сдвига v и $v + l$ для любого $l \in L$ дают одинаковый сдвиг. Назовем такие векторы *эквивалентными*.

Определение. Скажем, что вектор сдвига v *общий*, если он и все ему эквивалентные не параллельны никакой фасете параллелоэдра P.

Заметим, что если вектор сдвига общий, то у поднятого параллелоэдра $\widetilde{P}$ фасеты каждого 4-пояска либо все параллельны вертикальному направлению, либо все трансверсальны этому направлению. Иначе говоря, каждый 4-поясок либо не пересекается с верхней шапочкой параллелоэдра $\widetilde{P}$, либо пересекается с ней по двум смежным фасетам. Действительно, если 4-поясок пересекается с верхней шапочкой одной фасетой, то проекция этой фасеты есть кусок в P, пересекающийся с парой противоположных фасет P. Это возможно только, если вектор сдвига параллелен этим фасетам.

Теорема 2. *Пусть $\widetilde{P}$ - поднятие параллелоэдрара P с помощью второй конструкции, причем вектор сдвига v общий. Тогда для P и $\widetilde{P}$ выполнены условия Вороного.*

Доказательство. Если грань G коразмерности 2 сдвинутого разбиения попадает на фасету F параллелоэдра P, то, так как сдвиг параллельный, одновременно с ней на F накладывается одна из фасет, смежных G. А такой сдвиг получается, если вектор сдвига параллелен F. Поэтому если сдвиг v общий, то фасеты параллелоэдра P и фасеты любой сдвинутой ячейки T' пересекаются трансверсально. Пользуясь этим, мы можем по функции f (заданной над всем пространством V) задать изломы b_F вдоль фасет F параллелоэдра P (да и любой ячейки разбиения $\mathcal{T}$). Делается это так. Фасета F покрыта ее пересечениями со сдвинутыми ячейками T'. Такое пересечение есть фасета куска $P \cap T'$, и вдоль нее определен излом $b_{F \cap T'}$ функции f. Мы утверждаем, что эти изломы не зависят от выбора сдвинутой ячейки T'. Предположим сначала, что ячейки T' и T'' соседние и разделены фасетой F'. Так как в силу общности сдвига фасеты F и F' пересекаются трансверсально, то по Лемме 1 изломы вдоль *кусочков* $F \cap T'$ и $F \cap T''$ фасеты F одинаковы. А в общем случае два кусочка фасеты F соединяются цепочкой соседних кусочков. Тем самым мы доказали, что излом функции f вдоль любого кусочка фасеты F один и тот же, и может быть принят в качестве b_F.

Согласованность этих изломов следует просто из того обстоятельства, что эти изломы происходят из одной функции f. Тем самым мы получаем условие Вороного для P в форме изломов.

Одновременно мы получили изломы на боковых фасетах поднятого параллелоэдра $\widetilde{P}$. По определению функции f ее линейные части дает изломы на фасетах верхней и нижней шапочек. $\square$

Конечно, какое-то условие общности сдвига v нужно, чтобы из существования подъема для P следовало выполнение условия Вороного. В самом деле, если вектор сдвига $v = 0$, мы получаем "тривиальный" подъем P в виде призмы. Наша гипотеза состоит в том, что *если вектор сдвига v отличен от нуля, то для P и его поднятия $\widetilde{P}$ выполнено условие Вороного.*

§ 9. Свободные направления

В предыдущих разделах мы показали, что обе конструкции подъема фактически эквивалентны и приводят к одному и тому же классу поднятых параллелоэдров. Однако остаются вопросы – насколько велик этот класс? из чего он состоит? как много новых параллелоэдров $\widetilde{P}$ мы при этом получаем? Для этого нам нужно понять – какими свойствами обладают построенные поднятия

$\widetilde{P}$. Уже при обсуждении первой конструкции поднятия мы видели, что построенный параллелоэдр $\widetilde{P}$ является свободным в вертикальном направлении. Еще более очевидно это при второй конструкции.

Напомним, что свобода параллелоэдра $\widetilde{P}$ (в вертикальном направлении, другие направления нас пока не интересуют) означает, что для некоторого (а тогда и для любого) вертикального отрезка $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) сумма Минковского $\widetilde{P} + I$ тоже является параллелоэдром.

Мы утверждаем, что *свобода параллелоэдра* $\widetilde{P}$ *эквивалентна существованию ламины,* то есть представимости $\widetilde{P}$ как подъема некоторого параллелоэдра P меньшей размерности, а также некоторым другим свойствам. Чтобы заниматься этими вопросами, мы слегка изменим обозначения. А именно, параллелоэдр $\widetilde{P}$ и пространство $\widetilde{V}$ мы будем обозначать просто как P и V, считая, что $V = V' \times \mathbb{R}$ и тем самым выделяя 'вертикальное' направление в V. Проекция вдоль вертикального направления обозначается как $\pi : V \to V'$. Соответствующие объекты 'внизу', то есть в V', мы будем снабжать штрихами. В частности, $P' = \pi(P)$.

Рассмотрим фасеты P в отношении вертикальной проекции. Некоторые фасеты видны сверху, т.е. их проекция вдоль вертикального направления взаимно однозначна. Они образуют верхнюю шапочку P. Аналогично формируется нижняя шапочка. Часть границы P между этими шапочками мы называем *экватором.* Более точно, экватором называется прообраз (в P) границы P'. Граница P' состоит из фасет F'. И экватор состоит из прообразов фасет многогранника P'. Эти прообразы мы называем *гранями экватора.* Они бывают двух типов. Либо они являются фасетами P. Либо это грань P коразмерности 2, которая изоморфно проектируется на фасету многогранника P'. В этом втором случае она может быть либо контактной, либо примитивной гранью параллелоэдра P.

Определение. Скажем, что P имеет *контактный экватор*, если любая грань его экватора контактна.

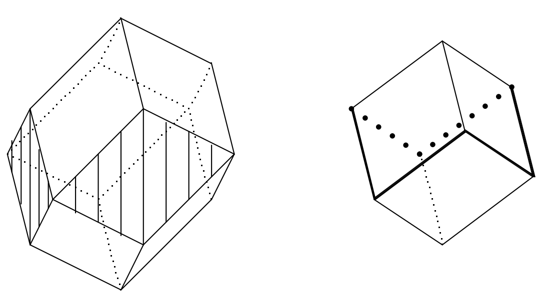

Рис. 7

Тут нарисованы два параллелоэдра и их экваторы. На рис. слева экватор состоит из 4 фасет (заштрихованные). Справа экватор состоит из шести ребер, нарисованных более жирно. В обоих примерах экваторы состоят из контактных граней.

Определение. *Подгруппой Венкова* называется подгруппа L_0 в L (трансляционной решетке для P), порожденная векторами l_G, где G пробегает контактные грани экватора.

В общем случае подгруппа Венкова может иметь любой ранг, см. [3]. В случае, когда P включается в ламину (то есть сдвиги P с помощью решетки Венкова L_0 образуют ламинарный подъем параллелоэдра P'), ранг подгруппы Венкова на единицу меньше размерности V. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть P - параллелоэдр в пространстве $V = V' \times \mathbb{R}$. Пусть задано вертикальное направление, которое определяет экватор. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) P свободен в вертикальном направлении;

2) Для любого 6-пояска некоторая его фасета параллельна вертикальному направлению (то есть входит в экватор);

3) P имеет контактный экватор;

4) проекция $P' = \pi(P)$ является параллелоэдром (с трансляционной решеткой L'), и подгруппа Венкова L_0 изоморфно проектируется на L';

5) P включается в ламину $\mathcal{L} = \{P(l) : l \in L_0\}$;

6) P является подъемом некоторого параллелоэдра на 1 меньшей размерности.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) была частично установлена в работе [2]. Окончательное доказательство дано в [18]. Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) очень просто. В самом деле, пусть имеется 6-поясок для P, все фасеты которого непараллельны вертикальному направлению. Но любой поясок пересекает экватор. В нашем случае он пересекает экватор по некоторой грани G коразмерности 2. Так как P свободен, то сумма его $P + I$ с некоторым вертикальным отрезком I тоже является параллелоэдром. Очевидно, что $P + I$ содержит в качестве фасеты новую фасету $G + I$. Так что наш 6-поясок превращается в 8-поясок, что противоречит параллелоэдральности $P + I$.

2) и 3) тривиально эквивалентны. В самом деле, пусть G - грань экватора. Если она является фасетой P, она контактна. Пусть ее коразмерность равна 2, и она неконтактна. Тогда она задает 6-поясок, все фасеты которого не параллельны вертикальному направлению. Обратное очевидно.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 4) легко вытекает из [1; теорема 1]. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 4) доказана в [3].

Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 5) установлена в [17; теорема 5].

4) $\Rightarrow$ 5). Фактически мы уже построили ламину как комплекс $\mathcal{L}$, состоящий из ячеек $P + l$, где l пробегает L_0. Во всяком случае, мы имеем, что $\pi(P) = P'$ является параллелоэдром, и что группа сдвигов L_0 изоморфна L. Поэтому проекция $\pi : |\mathcal{L}| \to V'$ сюръективна. Осталось только проверить, что тело комплекса $|\mathcal{L}|$, рассмотренное как многозначная функция на V', является непрерывной функцией. Или, в терминологии раздела 6, что гомоморфизм скачков $j : L' \to \mathbb{R}$ нулевой. Но это следует из того, что подгруппа Венкова порождается контактными векторами. Действительно, по определению экватора и по построению комплекса $\mathcal{L}$ скачки для проекций контактных векторов решетки L_0 равны нулю.

Включение параллелоэдра P в ламину как раз и означает, что P получается как подъем своей проекции. Поэтому эквивалентности 1) $\Leftrightarrow$ 5) и 1) $\Leftrightarrow$ 6) означают, что поднимаемые параллелоэдры – это в точности параллелоэдры, свободные в некотором направлении. Это завершает доказательство теоремы 3. $\square$

Таким образом, поднимаемые параллелоэдры – это в точности параллелоэдры, свободные в некотором направлении. Иначе говоря, свободные (в некотором направлении) параллелоэдры сводятся в определенном смысле к параллелоэдрам меньшей размерности. Впрочем, как показано в работах [19] и [20], существуют параллелоэдры (размерности 6 и более), несвободные ни в каком направлении. С другой стороны, как показал Делоне [13], все параллелоэдры размерности 4 могут быть получены как поднятия.

Мы имеем также несколько курьезный факт – что свободные параллелоэдры удовлетворяют условию Вороного, правда, при дополнительном условии общности (см. определение общего сдвига перед теоремой 2).

Список литературы

[1] Б.А. Венков, О проектировании параллелоэдров, *Матем. сборник*, **49** (1959), 207-224

[2] В.П. Гришухин, Параллелоэдры ненулевой толщины, *Матем. сборник*, **195**:5 (2004), 59-78.

[3] A.G. Horvath, On the connection between the projection and the extension of a parallelotope. *Monatshefte für Mathematik*, **150**:3 (2007), 211-216.

[4] A.N.Magazinov, Voronoi's conjecture for extensions of Voronoi parallelohedra, *Moscow J. of Combinatorics an Number Theory* **5**:3 (2015) 86–131.

[5] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à là théorie des formes quadratiques, Deuxième Mémoire, Recherches sur les parallélloedres primitifs, *J. Reine Angew. Math.* **134** (1908), 198-287; **136** (1909), 67-178.

[6] C. Davis, The set of non-linearity of a convex piecewise-linear function. *Scripta Mathematica* **24** (1959), 219-228.

[7] P. McMullen, Duality, sections and projections of certain Euclidean tilings. *Geom. Dedicata* **49** (1994), 183-202.

[8] J.H.Conway, N.J.A.Sloane, The cell structures of certain lattices, in: *Miscellanea Mathematica*, Springer-Verlag, Berlin at al. (1991) 71–107.

[9] С.С.Рышков, Прямое геометрическое описание n-мерных параллелоэдров второго типа Вороного, *УМН*, **5**4:1 (1999) 263–264.

[10] Н.П.Долбилин, Свойства граней параллелоэдров, *Труды МИАН*, Т.**2**66 (2009) 112–126.

[11] Б.А. Венков, Об одним классе эвклидовых многогранников, *Вестник ЛГУ*, 1954, № 2, 11-31.

[12] Г. Зейферт, В. Трелльфаль, *Топология*, М.; Л.: ОНТИ, 1938.

[13] B.N. Delaunay, Sur la partition régulière de l'espace a 4 dimensions. *Изв. АН СССР, VII сер. Отд. физ-матемю наук* (1929), № 1, 79-110; № 2, 147-164.

[14] Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы.* Мир, М., 1990.

[15] Е.П.Барановский, Разбиение евклидовых пространств на L-многогранники некоторых совершенных решеток, *Труды МИАН*, Т.**1**96 (1991) 27–46.

[16] С.С.Рышков, Е.П.Барановский, С-типы n-мерных решеток и пятимерные примитиыные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий), *Труды МИАН*, Т.**1**37 (1976) 1–132.

[17] A. Vegh. On extraction of parallelotopes, *Stud. Univ. Zilina,* Math. Ser. **2**6 (2014) 49-54.

[18] M. Dutour Sikirić, A. Grishukhin, A. Magazinov, On the sum of a parallelotope and a zonotope. *Europ. J. Combinatorics*, **42** (2014), 49-73.

[19] В.П. Гришухин, Свободные и несвободные многогранники Вороного, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 367-378.

[20] В.П. Гришухин, Многогранники Делоне и Вороного корневой решетки E_7 и двойственной решетки E_7^*, *Труды МИАН*, **2**75 (2011), 68–86.

В.П. Гришухин (V.P. Grishukhin)
Центральный экономико-математической институт РАН
E-mail: vgrishukhin@mail.ru

Поступила в редакцию
??.11.2018

В.И. Данилов (V.I. Danilov)
Центральный экономико-математической институт РАН
E-mail: vdanilov43@mail.ru