О теореме Скарфа

Данилов В.И. (ЦЭМИ РАН)

В этой заметке мы не приводим новых фактов. Она посвящена изложению более короткого и прямого доказательства знаменитой теоремы Скарфа о непустоте ядра сбалансированой игры, а также выводу теоремы Какутани из теоремы Брауэра.

Напомним некоторые определения. Под игрой мы будем понимать кооперативную игру без побочных платежей. Более формально, игрой называется пара (N, V), где N - конечное множество участников, а $V = (V(S), S \subset N)$ - семейство множеств $V(S)$, каждое в своем пространстве $\mathbb{R}^S$. Принадлежность вектора $x = (x_i, i \in S)$ множеству $V(S)$ интерпретируется как возможность коалиции S обеспечить каждому своему члену i "полезность" x_i. Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ через x_S обозначается естественная проекция x на пространство $\mathbb{R}^S$ (мы забываем значения x_j для $j \notin S$). Вектор x называется *ядерным* (или принадлежащим ядру $C(V)$), если: a) $x \in V(N)$, и b) для любой (непустой) коалиции S в множестве $V(S)$ нет элемента y, который был бы больше x_S по всем координатам.

Обычно предполагается, что множества $V(S)$ непусты, замкнуты, ограничены сверху (существует вектор $M \in \mathbb{R}^N$, что $y \geq M_S$ для любого $y \in V(S)$) и нормальны (в том смысле, что если $y \geq z \in V(S)$, то $y \in V(S)$). В этом случае условие b) можно записать чуть проще: для любой коалиции x_S не принадлежит внутренности множества $V(S)$.

Ядро игры может быть пустым или нет. Интуитивно довольно понятно, что пустота ядра связана с тем, что возможности "малых" коалиций велики по сравнению с возможностью "тотальной" коалиции N. В противоположном случае следует ожидать, что ядро непусто. Одна из формализаций этй идеи аппелирует к понятию сбалансированности. Предположим, что с каждой коалицией S связано неотрицательное число $\lambda(S)$; такая система коэффициентов $\lambda = (\lambda(S), S \subset N)$ называется *сбалансированной*, если для любого $i \in N$ выполнено равенство $\sum_{i \in S} \lambda(S) = 1$. Сбалансированную систему коэффициентов можно понимать как что-то вроде разбиения единицы. В самом деле, обозначим через $\mathbf{1_S}$ характеристический вектор (или функцию) подмножества $S \subset N$, то есть эта функция на N равна 1 в точках S и 0 вне S. Тогда сбалансированность означает просто, что $\mathbf{1_N} = \sum_{\mathbf{S}} \lambda(\mathbf{S})\mathbf{1_S}$, то есть что "единичная" функция $\mathbf{1_N}$ представлена в виде суммы неотрицательных функций $\lambda(S)\mathbf{1_S}$.

Если все $\lambda(S)$ равны 0 или 1, сбалансированная система коэффициентов превращается просто в некоторое разбиение множества N на непересекающиеся коалиции, $N = S_1 \coprod \ldots \coprod S_k$. А для любого такого разбиения довольно естественным представляется требование супераддитивности: если для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ все его проекции x_{S_j} принадлежат $V(S_j)$ $(j = 1, ..., k)$, то $x \in V(N)$. Аналогичное требование (условие) можно сформулировать для сбалансированой системы коэффициентов λ: если вектор $x \in \mathbb{R}^N$ таков, что $x_S \in V(S)$ для любой коалиции S с $\lambda(S) > 0$, то $x \subset V(N)$. И если это требование выполнено для любой сбалансированной системы коэффициентов λ, игра V называется *сбалансированной* (по Скарфу). Конечно, интерпретация этого требования выглядит уже не столь гладко и предполагает "частичное" функционирование коалиций и "частичное" вхождение участников в коалиции. Как бы то ни было, удобно ввести следующее обозначение: для сбалансированой системы λ

$$V(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^N, x_S \in V(S) \text{ для любого } S \in N \text{ с } \lambda(S) > 0\}.$$

В этих обозначениях сбалансированность игры означает, что $V(\lambda) \subset V(N)$ для любой сбалансированной системы коэффициентов λ.

Скарф [1] доказал в 1967 г. следующую теорему

Теорема. *Если игра V сбалансирована, то ее ядро $C(V)$ непусто.*

Его оригинальное доказательство состояло в некоторой конечной аппроксимации задачи и построении затем некоторого алгоритма. В 1973 г. Шепли [2], заменив алгоритм Скарфа некоторой обобщенной версией леммы Шпернера, получил из нее обобщение теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (известное как ККМШ), и уже ее использовал для доказательства теоремы Скарфа. С тех пор такой путь доказательства теоремы Скарфа стал стандартным (см., например, книги [3,4]; подробнее об истории см. [5,6]). Однако этот путь представляется нам очень окольным. И даже усовершенствованное (и "элегантное", как заявлено в [4]) доказательство занимает 4 страницы. Почти прямое доказательство приведено в [5], но и оно аппелирует к покрытию симплекса. Прямое (т.е. не обращающееся к ККМШ) рассуждение приведено в [7]. В настоящей заметке предлагается совершенно прямое и прозрачное рассуждение, которое аппелирует непосредственно к теореме Какутани и выглядит как стандартное доказазательство существования равновесий.

Более точно, мы покажем, что "всегда" (т.е. без гипотез о сбалансированности) существует нечто (псевдоядерное, или равновесное состояние), что в предположениях сбалансированности дает ядерный исход. Для этого полезно смотреть на игру как на некую "экономику". Коалиции выступают как фирмы, конкурирующие за участников. Более точно, лучше представлять, что каждый участник владеет единицей своего индивидуального товара $\mathbf{1_i}$, а коалиция S для полноценного ("с интенсивностью 1") функционирования нуждается в затратах ресурса $\mathbf{1_i}$. Впрочем, она может функционировать и с интенсивностью $\lambda(S)$, затрачивая тогда ресурс $\lambda(S)\mathbf{1_S}$. Если $\lambda = (\lambda(S))$ - интенсивности функционирования всех фирм-коалиций, то в целом экономика должна затратить ресурсов в количестве $\sum_S \lambda(S)\mathbf{1_S}$. А имеется его $\mathbf{1_N}$. Поэтому условие сбалансированности λ - это в точности условие "материального" баланса, или баланса по труду.

Вектор $x = (x_i) \in \mathbb{R}^N$ играет роль цен или, точнее, зарплат (если индивидуальные ресурсы понимать как труд). Если $x_S \notin V(S)$, коалиция S не может обеспечить своих членов такой зарплатой и функционировать не может (то есть $\lambda(S) = 0$).

Так мы приходим к понятию *допустимого* состояния: это пара (λ, x), где λ - сбалансированная система коэффициентов, а $x \in V(\lambda)$. Остается подключить к игре условие b) из определения ядра.

Назовем допустимое состояние (x, λ) *равновесным*, если для любой коалиции S вектор x_S не попадает во внутренность $V(S)$. В самом деле, если x_S попадает строго внутрь $V(S)$, то коалиция S может получить больше, чем ей предлагается дележом x. Естественно считать, что в этом случае фирма-коалиция S имеет "положительную прибыль" и стремится функционировать более интенсивно. То есть сложившаяся структура λ еще не в равновесии. Требование b) (вместе с условием, что $\lambda(S) = 0$ при $x_S \notin V(S)$) - это по существу аналог требования максимизации прибыли каждой фирмой.

Теорема. *Равновесные состояния всегда существуют.*

Схема доказательства - самая обычная: если спрос на какого-то участника превышает предложение, нужно увеличивать его зарплату, и наоборот. Остается только оформить это в точных терминах, построив некоторое вспомогательное отображение, неподвижные точки которого дают равновесные состояния. Иначе говоря, нужно сказать, как по имеющемуся состоянию (x, λ) определяется новое состояние (x', λ'), и на каком множестве все это происходит.

Начнем с множеств. Через X обозначим "большой" куб в пространстве $\mathbb{R}^N$. Более точно, пусть M - такое число, что: 1) для любой коалиции S выполнено $V(S) < M\mathbf{1_S}$, и 2) точка $-M$ лежит строго внутри множества $V(i)$ для каждого участника $i \in N$. Тогда $X = [-M, M]^N$. Далее, $\Lambda = [0, 2]^{2^N}$, т.е. каждое число $\lambda(S)$ в принципе может принимать значение между 0 и 2.

Зададим теперь отображение (а точнее, соответствие) F из $X \times \Lambda$ в себя. Для этого предварительно определим соответствие

$$\phi : \Lambda \Longrightarrow X,$$

и для каждой коалиции S соответствие

$$\psi_S : X \Longrightarrow [0, 2].$$

После этого образ точки (x, λ) определяется как

$$F(x, \lambda) = (\phi(\lambda), (\psi_S(x))).$$

Множество $\phi(\lambda)$ определяется как аргмаксимум линейной функции $\sum_S \lambda(S)\mathbf{1}_S - \mathbf{1}_N$ на кубе X. Множество $\psi_S(x)$ определяется по правилу:

$$\psi_S(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } x_S \notin V(S); \\ [0,2], & \text{если } x_S \text{ лежит на границе } V(S); \\ \{2\}, & \text{если } x_S \text{ попадает во внутренность } V(S). \end{cases}$$

Мы утверждаем, что любая неподвижная точка (x^*, λ^*) соответствия F является равновесным состоянием (и обратно). Для этого покажем прежде всего, что набор λ^* сбалансирован. В самом деле, представим, что для некоторого участника i имеет место неравенство $\sum_{S \ni i} \lambda^*(S) > 1$. Тогда (вспоминая определение ϕ)

$x_i^* = M$. Но это означает, что x_S^* не лежит в множестве $V(S)$ ни для какой коалиции $S \ni i$. В соответствии с определением ψ_S, $\lambda^*(S) = 0$ для всех таких коалиций, откуда $\sum_{S \ni i} \lambda^*(S) = 0$. Противоречие. Аналогично (и даже проще) приводится к противоречию предположение о том, что для некоторого участника i $\sum_{S \ni i} \lambda^*(S) < 1$. В этом случае $x_i^* = -M$, и в соответствии с определением $\psi_i \lambda^*(i) = 2$, так что $\sum_{S \ni i} \lambda^*(S) \leq \lambda^*(i) = 2 > 1$.

Итак, система λ^* сбалансирована. Тогда, конечно, все $\lambda^*(S) \geq 1$, откуда x_S^* не попадает во внутренность $V(S)$ ни для какой коалиции S. И, наконец, если $\lambda^*(S) > 0$, то $x_S^* \in V(S)$, то есть $x^* \in V(\lambda^*)$.

Осталось показать, что неподвижные точки существуют. Очевидно, что все соответствия ϕ и ψ_S замкнутые с выпуклыми (и непустыми) образами, поэтому это же верно для F. А тогда по теореме Какутани существует неподвижная точка (x^*, λ^*). $\square$

Как видно, доказательство занимает примерно страницу. Видно также, что мы минимально использовали предположение о непустоте $V(S)$: нужно было только, что непусты индивидуальные множества. На самом деле видно, как подправить доказательство, чтобы обойтись еще более слабым требованием: для любого участника i найдется коалиция $S \ni i$ с непустым $V(S)$. Если же участник i абсолютно слабый, тогда, конечно, равновесного состояния не существует. Но тогда нужно просто уменьшить N, выбросив абсолютно слабых участников.

Видно также, что гипотеза о том, что с каждой коалицией связана одна фирма, и что она требует затрат $\mathbf{1_S}$, а у каждого есть по единице своего ресурса, не очень-то и нужна, и можно соответствующим образом все обобщить.

Наконец, видно, что мы стандартным способом свели все к теореме Какутани. Считается (и, видимо, правильно), что теорема Какутани чуть сложнее теоремы Брауэра, и известные мне выводы требовали довольно длинной (хотя и рутинной) возни. Здесь я хочу предложить сведение Какутани к Брауэру, которое не требует технической возни и предположения конечномерности. Оно инспирировано работой [6].

Выпуклым компактом я буду называть далее выпуклое компактное подмножество X отделимого локально выпуклого векторного пространства V (при желании читатель может считать V конечномерным).

Теорема (Какутани-Гликсберг). *Пусть X - выпуклый компакт, а $F : X \Longrightarrow X$ замнутое соответствие с непустыми выпуклыми образами. Тогда существует точка $x^* \in X$, такая что $x^* \in F(x^*)$.*

Доказательство. Предположим, что неподвижных точек нет, и $x \notin F(x)$ для любой точки $x \in X$. Тогда для каждой точки $x \in X$ найдется (непрерывный) линейный функционал $p \in V^*$, строго разделяющий x и множество $F(x)$ (теорема Хана-Банаха). Обозначим

$$\phi(x) = \{p \in V^*, px < py \text{ для любого } y \in F(x)\}.$$

Как легко понять, соответствие ϕ полуоткрыто снизу, то есть если $p \in \phi(x)$, то $p \in \phi(x')$ для x' из некоторой окрестности точки x. Иначе говоря, множества $\phi^{-1}(p)$

открыты в X, и непустота множеств $\phi(x)$, отмеченная выше, означает, что они покрывают X. В силу компактности X можно взять конечное число $p_1, ..., p_n$, так что $U_i = \phi^{-1}(p_i)$ покрывают X. Пользуясь (непрерывным) разбиением единицы, подчиненным покрытию (U_i), легко построить непрерывный селектор f соответствия ϕ. То есть непрерывное отображение $f : X \longrightarrow V^*$, такое что $f(x)x < f(x)y$ для любого $y \in F(x)$. (Фактически образ f будет конечномерным, так что попали по существу в конечномерную ситуацию.)

Образуем теперь другое соответствие $\psi : X \Longrightarrow X$,

$$\psi(x) = \{y \in X, f(x)x < f(x)y\}.$$

В силу непрерывности f соответствие ψ полуоткрыто снизу (и даже открыто), образы его выпуклые, и $x \notin \psi(x)$ для любого $x \in X$. Тогда (по существу повторяя предыдущий трюк и пользуясь теоремой Брауэра) существует максимальный элемент x^* для соответствия ψ, то есть такой элемент, что $\psi(x^*) = \emptyset$. Но $F(x^*) \subset \psi(x^*)$, поэтому $F(x^*)$ тоже пусто, что противоречит предположениям теоремы. $\Box$

В этом рассуждении ключевам моментом представляется утверждение о строгом разделении x и $F(x)$.

Литература

1. Scarf H. The core of an N-person game//Econometrica, 1967, v. 35, 50-69

2. Shapley L. On balanced games without side payments/Hu T.C., Robinson S.M. (eds.) Mathematical programming. New York: Academic Press, 1973

3. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983

4. Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир, 1995

5. Zhou L. A theorem on open coverings of a simplex and Scarf's core existence theorem throuh Brower's fixed point theorem// Economic Theory, 1994, v. 4, 473-477

6. Krasa S., Yannelis N.C. An elementary proof of the Knaster- Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley Theorem//Economic Theory, v. 4, 467-471

7. Данилов В.И., Сотсков А.И. Уравновешенные состояния и теоремы о ядре // Оптимизация (1987) т. 41 (58), 36-49