Основные направления и результаты исследований Ефимова Б.А.

1. Общая топология: диадические пространства.

Доказано (1963), что в диадическом бикомпакте (непрерывный образ обобщённого канторовского дисконтинуума D^τ) каждое замкнутое множество типа G_δ и любое каноническое замкнутое множество являются снова диадическими бикомпактами. Доказана теорема о том, что вес диадического бикомпакта равен верхней грани бесконечных характеров его всюду плотных подпространств. Каждая неизолированная точка диадического является к-точкой. Доказано, что любой диадический бикомпакт веса τ отображается на тихоновский куб I^τ и содержит канторовский дисконтинуум D^τ тогда и только тогда, когда $\tau^{\aleph} = \tau$. Доказано совместно с В.М.Кузнецовым (1970), что число топологических типов диадических пространств и диадических бикомпактов веса τ равно $\exp\exp\tau$ и $\exp\tau$, соответственно. Построены (1964) "Дикие" диадические бикомпакты сингулярного веса. Исследован класс открыто-диадических бикомпатов (= открытые образы произведения метрических компактов). Доказано (1969), что всякий связный конечномерный открыто-диадический бикомпакт метризуем.

2. Общая топология: экстремально – несвязные пространства.

Хаусдорфово пространство называется экстремально несвязным, если замыкание любого открытого снова открыто. Существование бесконечных недискретных экстремально несвязных бикомпактов следует из теоремы Стоуна о представлении полной бесконечной булевой алгебры. А.Глисон (1958) называет компакт P проективным в классе компактов, если для любых компактов X и У, каждого непрерывного отображения g компакта X на компакт У и любого непрерывного отображения $h: P \to Y$ существует непрерывное отображение $f : P \to X$ такое, что $gf = h$. Если отображение h – неприводимо, то P = pX называется абсолютом X.

В 1968 - 70 годах мною получены такие результаты. Пусть $\tau^{\aleph} = \tau$. Тогда абсолют pD^τ является универсальным (т.е. содержит все экстремально несвязные бикомпакты веса $\le \tau$) и экстремально несвязным бикомпактом, вес и характер каждой точки которого равны τ. Если бикомпакт X отображается на тихоновский куб I^τ, то X содержит все экстремально связные пространства веса $\le \tau$. Обратно, если X содержит бесконечный экстремально несвязный бикомпакт веса τ и клеточности s, то X может быть отображён на куб I^σ, если $\sigma = \tau^{1/s} + \exp s$. Здесь $\tau^{1/\sigma} = \min \{m|\ m^\sigma$

$\geq \tau\}$, причём $s = \aleph_0$ или $s^{\aleph} = s$. Любой диадический бикомпакт несчётного веса τ отображается на I^{τ}, если τ нельзя представить в виде суммы счётного числа меньших кардиналов.

3. Общая топология: упорядоченные пространства.

Хаусдорфово X называется упорядоченным, если на X существует линейный порядок < такой, что интервалы $\{x \in X \mid a < x < b\}$, $a,b \in X$, образуют базу топологии на X.

Совместно с Г.И.Чертановым доказана теорема о том , что линейно упорядоченный бикомпакт X метризуем тогда и только тогда, когда X гомеоморфен подпространству $\sum$ - произведения отрезков. Найдены классы топологических пространств (например, упорядоченные) и указаны операции над ними, сохраняющие следующее свойство: Пересечение полученного класса с классом диадических бикомпактов является классом метрических компактов. Для любого целого $n > 1$ построено "жёсткое" семейство, состоящее из n связных линейно упорядоченных бикомпактов (обобщённых дуг или отрезков) такое, что для любой пары X_i и $У_j$ из этого семейства любое непрерывное отображение X_i в $У_j$ является постоянным.

4. Роль континуум-гипотезы (CH), гипотезы Лузина, Аксиомы Мартина, гипотезы Суслина, гипотезы о существовании недостижимых кардинальных чисел в общей топологии.

Разные авторы доказали, что эти аксиомы независимы в системе аксиом Цермело-Френкеля. Из многочисленных результатов в этом направлении отметим такие.

Теорема 1. Следующие два условия эквивалентны:

α). $\exp \aleph_0 < \exp \aleph_1$ (слабый вариант CH).

β). Каждый экстремально несвязный бикомпакт веса континуум удовлетворяет условию Суслина.

Теорема 2. Из гипотезы Суслина следует существование связного совершенно нормального не сепарабельного бикомпата, лежащего в Σ- произведении отрезков в числе $\tau > \aleph_0$.

Заметим, что неметризуемый континуум Суслина (если он существует) не содержится в $\sum$-произведении отрезков.

5. Общая топология: Разное.

Найдено точное число топологических типов метрических пространств бесконечного веса τ. Исследован класс счётных связных хаусдорфовых пространств (совместно с С.Ф.Цвидом, 1979). Доказано (1978), что существует счётное вполне регулярное пространство S с единственной неизолированной точкой, для которого сверхмощность S равна expexp ω_0. Другими словами, любой бикомпакт, содержащий S, имеет мощность гиперконтинуум.

Математическая экономика.

6. Модели экономического равновесия.

В середине 70-х годов мною совместно с П.Булонем была построена и изучена равновесная модель экономики с общественными благами и континуумом потребителей, в которой учитывается роль администрации, производящей общественные блага за счёт прямых и косвенных налогов. Основным результатом этой работы является теорема о существовании равновесного состояния в этой модели экономики. При этом мы не используем не ясное условие (s) Фуржо, а оставили лишь “гипотезу выживания”, которая утверждает, что при любых нормированных ценах p и заданном уровне общественных благ жизненный уровень потребителя обеспечен социальными выплатами (а не только дивидентами от владения собственности).

В конце 70-х годов мною совместно с А.С.Шаповаловым исследовался эффект Гейла манипулируемости равновесия участниками рынка с помощью уничтожения своих начальных запасов. Для любого манипулируемого рынка построено его расширение, которое является коалиционно манипулируемым, то есть существует коалиция участников, которая после перераспределения своих начальных запасов получает в новом равновесии более выгодные для себя равновесные наборы товаров.

В эти же годы (1981) совместно с А.С.Шаповаловым построена и изучена модель равновесия с взаимовлиянием и с учётом натуральных налогов на обмен. Предпочтение каждого участника зависило от потребления всех остальных участников. Доказано существование равновесия в этой модели. Однако, оно не является, как правило, оптимальным по Парето. Тем не менее, видоизменяя понятие оптимальности, с учётом заданной экзогенно налоговой политики, можно считать равновесие оптимальным в этом новом смысле.

Как правило, оптимальный уровень производства общественных благ задаётся экзогенно или с помощью максимизации эгзогенно заданной общественной функции на соответсвующем призводственном множестве. Мы построили (1985) модель экономического равновесия с налогами, общественными благами и встроеным в неё непрерывным механизмом общественного выбора уровня производства общественных благ.

7. Общественные функции полезности на потоках потребления или на временных потоках полезностей.

Общественные функции полезности на потоках потребления математически описываются функциями $W(x)$, заданными на бесконечно- мерном кубе I^{∞} или его подпространствах, непрерывными в той или иной топологии. Доказано (1994г. совместно с Г.А.Кошевым), что если $W(x)$ непрерывна в тихоновской топологии, уважает согласие (для любого конечного n имеем $W(p, p,\ldots,p, 0, \ldots) = (p, p,\ldots,p, 0, \ldots)$), анонимна (инвариантна относительно любой перестановки первых n координат), то она постоянна. Однако, если потребовать непрерывность в sup-топологии, то существуют непрерывные общественные функционалы, уважающие согласие и анонимные.

Примером такого функционала является критерий Роулса или его обобщения. Например, квазироулсовский критерий

$$W(x) = W_2(\inf(x), \sup(x)),$$

если $W_2(. | .)$ - соответствующая функция двух переменных. Мною доказано (1998г.), что всякий монотонный, уважающий согласие поколений и cl-равноправный критерий (т.е. для любых потоков x и y таких, что замыкания координат их функций полезности на отрезке сопадают, следует равенство $W(x) = W(y)$) является квазироулсовским.

Возможно, что векторы потребления сравниваются по многим критериям, ранжированным по их значимости, тогда временные потоки потребления лежат в лексикографическом произведении отрезков. В этом случае числового непрерывного функционала на таком произведении не существует. Тем не менее, мною доказано (2000г.), что любое непрерывное предпочтение, заданное на лексикографическом произведении отрезков, допускает нестандартную непрерывную функцию полезности для этого предпочтения.

8. **Топологические модели группового выбора**.

Модель на основе методов общей топологии.

Впервые такая модель была построена мною в 1980 году на основе канторовского совершенного множества C и его замкнутых подмножеств, которые трактовались как пространства бинарных характеристик участников.
Точки таких пространств являются последовательностями, состоящими нулей и единиц. Пусть $x \in X \subset C$ и T – счётное множество признаков. Тогда $x_t = 1$, если участник x обладает свойством $t \in T$, или $x_t = 0$, если участник x не обладает свойством t. Таким образом, $x = (x_t)$ – последовательность из нулей и единиц. На пространстве X вводится нестандартное расстояние, индуцированное некоторой равномерной структурой на X. Пусть $s \subset T$ – конечное множество признаков. Коалиции участников состоят из тех участников, у которых признаки на s совпадают. Коалиции являются открыто- замкнутыми множествами в X. Ситуацией в обществе X называлось равномерно непрерывное отображение σ пространства X в компактное пространство индивидуальных предпочтений P (замкнутых, транзивных и симметричных бинарных отношений на X). Естественным образом формулировались аксиомы Эрроу для коллективного агрегирования $\Phi(\sigma) \in P$. Если X - конечно, то по теореме Эрроу Φ – диктаторское правило. Если X – бесконечно, то из результатов Фишберна, Армстронга, Тангяна и других правило Φ определено некоторым ультрафильтром α на X, состоящим из коалиций участников и трактуемый как максимальная иерархия. Мною доказано, что пространством максимальных иерархий является некоторая равномерная компактификация X, лежащая в C. Таким образом, каждой свободной иерархии ставится в соответствие некоторая точка (x_t), $t \in T$, из канторова множества C, которая реализует «невидимого диктатора» счётным набором бинарных признаков.

Модель на основе алгебраической топологии.

Предпочтение индивида, определённое на к-мерном многообразии $M_к$ альтернатив, описывается непрерывным единичным векторным полем на $M_к$. Значение поля $p(x) \in S^{к-1}$ называется локальным предпочтением в x (или установкой в x). Вектор p(x) интерпретируется, как наиболее желательное направление движения участника из этой альтернативы. Множество всех допустимых локальных предпочтений в точке x называется локальным пространством предпочений S_x в точке x. Если на предпочтения участников не накладывается никаких ограничений, то $S_x = S^{к-1}$ является единичной (к-1) – мерной сферой и интерпретируется, как пространство локальных предпочтений участников. В 1980 году Г.Чичильницкая доказала, что любое непрерывное, симметричное и тождественное на диагонали агрегирование n-ки векторных полей порождает аналогичное отображение

$$\Phi^*: S^{к-1} \times \ldots \times S^{к-1} \to S^{к-1}$$

произведения n штук (к – 1)-мерных сфер в (к – 1)-мерную сферу. Она доказала, что такое отображение невозможно. Таким образом, возникает один из парадоксов стабильного агрегирования предпочтений n участников. В 1989 году мною предложена идея разрешения этого парадокса с помощью введения ограничения на локальные предпочтения. А именно, выделения для каждого $x \in M_к$ подпространства $S_x \subset S^{к-1}$, при этом вектор $p(x) \in S^{к-1} - S_x$ интерпретируется как запрещённое направление. Предполагается, что пространство индивидуальных предпочтений реализовано в виде пространства всех непрерывных сечений

$$P_S = \{\, p: M_к \to S^{к-1} \mid p(x) \in S_x,\ x \in M_k \}$$

заданного расслоения $S = \cup\{S_x,\ x \in M_r\}$.

Теорема. Для того, чтобы существовало непрерывное, анонимное и уважающее согласие правило агрегирования локальных предпочтений Φ: $(P_S)^n \to P_S$, необходимо и достаточно выполнение любого из условий:

i) для каждого $x \in M_к$ локальное пространство предпочтений S_x стягиваемо;

ii) для каждого $x \in M_к$ пространство $S_x \neq S^{к-1}$ и при этом S_x не зацепляет какое-нибудь замкнутое запрещённое подмножество $B \subset S^{к-1} - S_x$; iii) пространство P_S – послойно стягиваемо.

9. Строение множества согласованных ситуаций в моделях голосования.

Состоянием f социальной группы называется произвольный набор предпочтений $f = \{\leq_i \mid i \in N\}$ участников этой группы N, число которой $n > 2$. Множество альтернатив A является компактом без изолированных точек, лежащим в m-мерном евклидовым пространстве. Индивидуальные предпочтения $\leq_i$, определённые на A, предполагаются полными, рефлексивными, транзитивными и непрерывными. Пусть θ - множество всех таких предпочтений на A, наделённое метрикой Хаусдорфа h между их графиками G_i: $\rho(\leq_1, \leq_2) = h(G_1, G_2)$. Общественное предпочтение $<_d$ по правилу d – большинства определяется следующим образом. Если альтернативы a, b $\in$ A, то $(a <_d b) \Leftrightarrow (\mathrm{card}\ \{i \in N \mid a <_i b\} > d)$. Множество альтернатив $C_d(f)$, состоящее из тех альтернатив $a \in A$, для которых не существует $b \in A$ такого, что $a <_d b$, называтся d–ядром состояния $f \in \theta^n$. Состояние f называтся d-согласованным, если d-ядро не пусто. Пространство состояний θ^n также является метрическим, как произведение метрических пространств, поэтому можно поставить вопрос о топологическом строении d-согласованных состояний, лежащих в нём. В 1981 году мною совместно с С.Г.Влэдуцем доказано, что множество d-согласованных состояний в θ^n является непустым замкнутым нигде не плотным подмножеством. Содержательный смысл доказанной теоремы состоит в том, что множество d-согласованных состояний очень «худое», так как его дополнение открытое и всюду плотное.

Ситуация резко меняется, если множество A выпукло, а индивидуальные предпочтения вогнуты. В этом случае при выполнении условия Гринберга $D/n > к(к + 1)$, если к - размерность A, любое состояние d-согласовано.

В 1998 году совместно с А.Я.Кирутой построена модель социального равновесия (подробнее об этой модели далее). Если в этой модели индивидуальные функции социальной напряженности строить исходя из критерия Роулса, то получим социальное равновесие, которое мы назвали Роулсовским. Мы доказали, что если A – выпуклый компакт размерности к и выполнено условие Гринберга, то Роулсовское равновесие существует и лежит в d-ядре, рассмотренной выше модели голосования.

Математическая социология

10. Математические модели формирования социально- психологических установок индивидов.

. Вопрос о том, как формируются, образуются или изменяются установки, цели или мнения людей в окружающей среде, является ключевым вопросом, лежащим на стыке ряда наук: социологии и экономики, психологии и политики, физиологии и нейрофизиологии, математики и физики. Каждая из этих наук занимается "своими" установками: социология – социологическими, экономика – экономическими и т.п. Однако, полный ответ на этот вопрос в любой науке затрагивает фундаментальные проблемы религии и этики, философии и общественного выбора, теории полезности и теории справедливости. В работах 1997, 2000, 2001, -02, -03, -06, -08 годов развивается математическая теория установки и её изменения в результате взаимодействия людей в социальных группах.

При исследовании динамических процессов развития социальных групп применяется теория векторных полей и теория дифференциальных уравнений. Пионером в этом направлении был Курт Левин. Он писал в 1943 году, что склонность к теории поля в психологии проявляется в последних разновидностях психоанализа (например, «лукавые помыслы», притягивающие мужчину и женщину), а также в рамках теории условного рефлекса (например, «рефлекс цели» И. Павлова или «фиксированная установка» Д.Узнадзе]). «Вся жизнь, все её улучшения, вся её культура делается рефлексом цели, делается только людьми, стремящимися к той или другой поставленной ими себе в жизни цели» (И.П.Павлов). Рефлексы цели, инстинкты, смысл жизни – это одна или несколько индивидуальных или коллективных установок в социально-психологической среде. Концепция: моделью такой среды является векторное поле, заданное на подходящей многомерной шкале, предложена автором и Ю.Н.Гаврильцом в работе [1997]. К.Левин замечает, что социологи и психологи не очень преуспели в том, чтобы прояснить сущность и природу социально-психологического поля. Однако, физики и философы так же до сих пор не проделали глубокого анализа теории физического силового поля, полезного для психологов и социологов. Фактически, в тот момент, когда экспериментатор выражает различные потенциальные возможности поведения человека в виде числовой функции f(x, y) от одной или более переменных, он уже по существу имеет дело с теорией поля (в непрерывном или дискретном варианте). В 40-е годы прошлого века в основном исследовалась динамическая теория действия, основанная на экспериментах, цель которых было выявление действующих социально- психологических сил, как индивидуальных, так и коллективных. При этом были введены такие фундаментальные понятия как фазовое пространство и равновесное состояние, однако, теория дифференциальных уравнений не использовалась. В 50-х годах американский биофизик Н.Рашевский построил модель подражательного поведения человека, используя дифференциальное уравнение для описания изменения установок индивидов. В 80-х годах Вольфгангом Вайдличем для исследования поведения больших социальных групп были использованы методы статистической физики. Он ввел важное понятие «социоконфигурация группы», изменение которой наблюдаемо и отражает изменение установок индивидов или их действий, и написал дифференциальное уравнение изменения вероятности появления той или иной социоконфигурации. Свои исследования он применил к проблеме миграции населения Германии. Дирк Хельбинг исследовал поведенческие изменения в больших группах (в частности, изменения установок индивидов) с помощью парных взаимодействий, применив свою модель к движению транспорта по дорогам. Найденное дифференциальное уравнение для вероятности изменения социоконфигурации названо автором уравнением типа Больцмана. Оно хорошо аппроксимируется уравнением диффузии, коэффициент сдвига которого является градиентом некоторого потенциала, который интерпретируется, как социальное поле. Математические модели процессов формирования социально-психологических установок индивидов в малых социальных группах, использующие эффект влияния подражания на поведение человека, были исследованы в новой постановке вопроса Ю.Н.Гаврильцом, Б.А.Ефимовым, У.Х.Малковым и другими в серии работ.

В работах 1997, 2000 и 2001гг совместно с Ю.Н.Гаврильцом предложены и проанализированы линейные модели (в виде дифференциальных уравнений с управлением или без) формирования социально-психологических установок членов некоторой социальной группы под воздействием коллектива, собственной инерционности и внешнего стандарта или рекламы. Выявлены условия устойчивости стационарных состояний (значений переменных-установок) группы; показано, что при наличии связей между установками устойчивые состояния могут возникать в процессе корректирования скоростей изменения установок, который минимизирует некоторый функционал, являющийся аналогом кинетической энергии коллектива, необходимой для поддержания всех установок на гомеостатическом уровне.

В тех же работах отмечалось , что рассматриваемые уравнения могут использоваться и для моделирования изменений потребительского спроса (при неизменных ценах и доходах) - под воздействием указанных социально-психологических факторов. Для этого случая были выявлены некоторые достаточные условия рациональности стационарного спроса , т.е. условия существования соответствующей функции полезности у всех членов социальной группы.

В работе 2000г принимается более реалистическое предположение о минимизации каждым участником социальной группы (коллектива) собственных затрат «энергии» , зависящих явно только от переменных данного участника. Стационарные состояния описываются соотношениями , аналогичными прежним линейным системам. Процесс взаимодействия в этом случае моделируется не дифференциальными уравнениями, а некоторой итеративной процедурой выхода в состояние равновесия Нэша специальной игры n лиц. Доказано существование игрового равновесия в обобщенной игре, а также сходимость итеративного процесса к этому равновесию. Найдены достаточные условия единственности и оптимальности по Парето игрового равновесия. Рассмотрен новый класс монолитных игр, для которого в случае похожих участников или одинаковых участников дано аналитическое выражение для игрового равновесия. Найдено достаточное условие монолитности таких игр.

В этих работах, а также в работе 2003г, написанной совместно с У.Х.Малковым, получены основные результаты: сформулированы условия на параметры системы дифференциальных уравнений, при выполнении которых доказано существование равновесия в социальной группе, положительность решения и его устойчивость для некоторого класса нелинейных сил φ и ψ, включающий линейные силы. Главное из этих условий – ограниченность по совокупности установок скорости роста социальных сил некоторой константой, зависящей от параметров системы. Наличие в коллективе дружеских связей, симпатий и антипатий, лидера, сильных и слабых участников, т.е. наличие межличностных связей существенно меняет картину взаимодействия в этом коллективе. Сила подражания действует на каждого участника со стороны тех участников, которые связаны с ним дружескими связями. Эти связи или структуры взаимодействия задаются ориентированным графом. В работе 2002г доказано существование положительного стационарного состояния системы и его устойчивость по Ляпунову для любой структуры взаимодействий индивидов при условии, что значимость каждого участника не меньше 1.

В работе 2001г детерминированная динамическая модель изменения установок переносится в “стохастическую обстановку”. Рассмотрено несколько вариантов стохастических моделей формирования установок в социальной среде: за счет стохастичности начальных условий, стохастичности параметров модели, флюктуации социальных сил или социальной среды. Эти модели описываются системами стохастических дифференциальных уравнений первого порядка.

Доказано при некоторых условиях существование их решений и их стохастическая устойчивость. Найдены условия диссипативности исследуемых стохастических систем и ограниченности их корреляционных матриц. Доказано существование и устойчивость стационарных распределений установок индивидов к действию белого шума. Для симметричной социальной группы в в случае попарно некоррелируемых белых шумов найдена явная форма равновесного распределения установок. Исследовано свободное стохастическое изменение установок индивидов в социальной группе. Показано, что исследуемое взаимодействие обладает общей монотонной энтропийной устойчивостью. Рассмотрено несколько примеров конкретных моделей формирования установок в стохастической обстановке.

В работе 2006г исследуется эффект влияния измерения установки в процессе её формирования в социальной группе. Уточняется процесс измерения «установки действия». Построены модели формирования установок, показывающие, что частота измерений может как замедлять, так и ускорять процесс формирования установок. Такие измерения могут приводить к одинаковым гомеостатическим установкам у всех индивидов. Они могут совпадать с установками экспериментатора, а в случае, изменения параметров модели во времени, возможено появления хаоса траектории установок индивидов, что влечёт распад социальной группы.

11. Математические модели справедливости и взаимности.

В работах 1993 и 1998 гг, написанных совместно с А.Я.Кирутой, предлагается новый подход к моделированию социальной справедливости, в котором справедливость рассматривается с точки зрения равновесия в некоторой модели согласования социальных интересов. Построение такой модели основано на введении для каждого индивида функции социальной напряжённости, которая в отличие от функции полезности, выражает его этическую позицию при сравнении благ, получаемых различными членами общества. Под социальным равновесием понимается состояние оптимальное по Парето, в котором ни один из членов общества не испытывает социальной напряжённости. Доказано существование социального равновесия и показано, что результаты о реализуемости различных принципов справедливости, полученных разными авторами, вытекают из этой теоремы при подходящем выборе функции социальной напряжённости. Устанавливается связь социального равновесия с ядром некоторой игры и равновесием голосования по правилу d-большинства. Если в этой модели индивидуальные функции социальной напряженности строить исходя из критерия Роулса, то получим социальное равновесие, которое мы назвали Роулсовским. Мы доказали, что если А – выпуклый компакт размерности к и выполнено условие Гринберга:

$d/n > к(к + 1)$, если к - размерность множества альтернатив А,

то Роулсовское равновесие существует и лежит в d-ядре, рассмотренной выше модели голосования. В работе 2007 года доказана теорема, утверждающая, что для игр голосования, участники которых реализуют взаимное поведение, согласованные и стабильные состояния существуют.

Рассмотрим общественную функцию полезности

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta \min\{x_1, x_2,\ldots,x_n\} + (1 - \delta)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \qquad (1)$$

являющуюся выпуклой комбинацией критерия Роулса и утилитарной функции полезности. Параметр δ является весом критерия Роулса в этой комбинации.

Взаимное поведение индивида определяется функцией полезности, которая определяется выпуклой комбинацией собственного денежного платежа x_i и функции (1)

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma_i, \delta_i) = (1 - \gamma_i)x_i + \gamma_i[\delta_i \mathrm{Min}_k \{x_k\} + (1 - \delta_i)\Sigma_k x_k] \qquad (2)$$

Это поведение является сочетанием эгоизма с поведением, промежуточным между эгалитаризмом и утилитаризмом.

Пусть К = $\{1,2, \ldots,n\}$ группа участников, $X = [0, \Omega]$ отрезок прямой –денежные платежи, получаемые индивидом, или альтернативы, X^n - пространство наборов платежей. Предпочтения участников определены на X^n и задаются непрерывными квазимаксиминными функциями полезности $U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma_i, \delta_i)$ вида (2). Множество альтернатив $A = \{x = (x_i): \Sigma_{i \in K} x_i = \Omega\}$ – выпукло, компактно и лежит в X^n. Оно состоит из сбалансированных распределений. Параметры (γ_i, δ_i) принадлежат квадрату $[0,1]^2$. Через $u = (u_1,u_2, \ldots, u_n)$ обозначается профиль функций полезности или ситуация в группе N. Далее, пусть $(\gamma, \delta) = \{\gamma_i, \delta_i\}$ - соответствующий профиль параметров, принадлежащий $[0,1]^{2n}$. Этот профиль (γ, δ) мы отождествляем с профилем u. Таким образом, пространство ситуаций $\mathbf{(P_{км})^n}$ квазимаксиминных функций полезности параметризуется точками 2n – мерного куба $[0,1]^{2n}$. Топология на $\mathbf{(P_{км})^n}$ индуцирована евклидовой топологией куба $[0,1]^{2n}$.

Теорема. В пространстве профилей $\mathbf{(P_{км})^n}$, состоящих из квазимаксиминных функций полезности (2), существует непустое открытое множество U_1, согласованных по правилу большинства, ситуаций. Множество несогласованных ситуаций U_2 – также открыто и не пусто.

Следствие. Существуют квазимаксиминные согласованные и устойчивые ситуации.

Таким образом, появляется надежда найти согласованный (справедливый) и устойчивый (к небольшим возмущениям) выбор, если индивиды проявляют альтруизм.

.