Теория пространственного равновесия: существование иммиграционно состоятельного деления на страны в многомерном пространстве

МАРАКУЛИН В. М.*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

12 мая 2016 г.

Аннотация

Изучается вопрос иммиграционно-состоятельного деления на страны на плоскости и конечномерном пространстве, который ранее анализировался исключительно в одномерной постановке. Это своеобразное равновесие Тибу, где принцип миграционной состоятельности предполагает, что у пограничных жителей отсутствуют выявленные мотивы для изменения юрисдикции, т. е. в данной точке размещения населения имеется равенство издержек у граждан граничных стран. Требуется, чтобы межстрановая граница была представлена непрерывной кривой (поверхностью).

Существование деления на страны установлено для измеримой плотности населения; изучались и описываются два подхода: 1) Специфическая одномерная аппроксимация, для которой находится неподвижная точка (теорема Какутани) и далее осуществляется предельный переход, — так было установлено существование деления на две страны на плоскости; 2) Общий подход, основанный на применении новой теоремы о неподвижной точке (обобщение теоремы Красносельского), — доказано существование деления на любое заданное число стран в конечномерном пространстве. Здесь частично применялись идеи из **?**, однако результат более общий и охватывает случай переменных центров и т. д.

Ключевые слова и фразы: Странообразование, мир Алесины и Сполаоре, миграция, стабильное разбиение, многомерная область

JEL Classification Numbers: D70, H20, H73

Введение

В основополагающей работе **?** была предложена базовая модель странообразования. В этой модели издержки населения описываются как сумма двух величин — отношения совокупных издержек на общую массу населения страны плюс транспортные

*Контактная информация: Маракулин В. М., Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга 4, 630090 Новосибирск; Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия; **e-mail**: marakul@math.nsc.ru

издержки до центра государства. Эта модель изучалась в ряде последующих работ, однако в каждой из них рассматривается случай одномерной области и стран интервального вида (странообразование на отрезке $[0,1]$). Наибольшие продвижения в части разрешения проблемы существования были получены в **?**, где с применением леммы Гейла — Никайдо — Дебре было доказано существование иммиграционно состоятельного разбиения отрезка на страны-интервалы, т. е. такого, что ни у кого нет стимулов к изменению страны проживания. В **?** были сделаны довольно сильные предположения на распределение населения — непрерывная плотность, отделённая от нуля. Далее в **?** математическая часть подхода была существенно усилена и распространена на случай распределения населения, описанного как мера Радона (вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре). В **?** появляется первое значимое решение, распространяющее полученный результат (теорему существования) на случай 2-мерной (и более) области. Доказательство из **?** весьма элегантно и основано на применении ККМ-леммы (Кнастера, Куратовского, Мазуркевича), однако полученный результат существенно ограничен наличием фиксированных в пространстве столиц. В настоящей работе я намерен сделать следующий шаг и позволить столицам (или другим значимым параметрам) непрерывно менять свое расположение в пространстве, что важно например в контексте партийного формирования. Доказательство основано на новом оригинальном обобщении теоремы Красносельского о неподвижной точке, которая распространяется на случай выпуклого многогранника.

В работе **?** было предложено весьма элегантное доказательство, основанное на применении леммы Гейла — Никайдо — Дебре. Однако оно слишком абстрактно и недостаточно общее одновременно, но главное — плохо приспособлено для распространения на двумерный случай. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим некоторое новое доказательство одномерной теоремы. Это доказательство интересно тем, что заложенные в него идеи можно распространить на случай большей размерности.

Во втором разделе мы рассмотрим частный случай деления прямоугольной области на две страны при произвольно заданном измеримом распределении населения. Здесь будет описана базисная одномерная аппроксимация, для которой находится неподвижная точка (теорема Какутани), и далее осуществляется предельный переход.

В третьем разделе предлагается дальнейшее обобщение и существование решения распространяется на случай произвольного числа стран, произвольной размерности и непрерывной зависимости от конечного числа значимых для странообразования параметров (столицы и проч.).

1 Странообразование в одномерном мире: новое доказательство для отрезка прямой

Итак, в работах **?**, **?** была обоснована возможность по-странового разбиения отрезка на страны-интервалы в случае распределения жителей описанного мерой Радона. Сейчас я хочу предложить ещё одну идею доказательства, описанного в виде конструкции непрерывного отображения, неподвижная точка которого даёт пострановое разбиение в случае наличия плотности распределения населения, определяющей положительную меру у каждого непустого открытого интервала, т. е. $\mathrm{supp}(\mu) = [0,1]$.

В данном разделе используются следующие обозначения: разбиение отрезка $[0,1]$ задаётся вектором $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)$, $w_0=0$, $w_n=1$, которому соответствуют «страны» $S_i=\langle w_{i-1},w_i\rangle$. На $[0,1]$ имеется абсолютно непрерывная неотрицательная мера μ, отражающая распределение жителей. Вектору w ставятся в соответствие векторы

$$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n),\quad x_i=w_i-w_{i-1},\quad i=1,2,\dots,n$$

и

$$a=(a_1,a_2,\dots,a_n),\quad a_i=\mu(\langle w_{i-1},w_i\rangle),\quad i=1,2,\dots,n.$$

Оба вектора принадлежат стандартному симплексу $\Delta^{(n-1)}\subset\mathbb{R}^n$, где x_i длина i-го отрезка-страны (по мере Лебега) и a_i это размер i-й популяции (по мере μ). Ясно, что $\mathbf{x}$ однозначно задаёт w. Более того, посредством $\mathbf{x}\in\Delta^{(n-1)}$ определяется удобная для анализа одномерной задачи параметризация (в двумерном случае эти переменные задают межстрановую границу).

Пусть $c_i(x,\cdot)$, $i=1,\dots,n$ — функции индивидуальных затрат в точке $x\in[0,1]$, зависящие от массы резидентов юрисдикции, расположения её центра и места жительства данного индивида — задано координатами $w_{i-1},w_i\in[0,1]$. Далее мы будем считать, что это функции достаточно общего вида, непрерывно зависящие от $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\Delta^{(n-1)}$ при $\mu(S_i(\mathbf{x}))>0$, $i=1,\dots,n$. Дополнительно предположим, что $c_i(x,\mathbf{x})\to+\infty$ при $\mu(S_i)\to 0$, $i=1,2$.

Теорема 1 *Если* $\operatorname{supp}(\mu)=[0,1]$, *то для каждого натурального n существует иммиграционно состоятельное разбиение отрезка* $[0,1]$ *на n* ***нетривиальных*** *стран-интервалов (с непустой внутренностью*[1]*).*

Доказательство теоремы **??**. В граничных точках $w_i=\sum_{j=1}^{i}x_j$ рассмотренных областей найдём эксцесс затрат возможных юрисдикций:

$$h_i(\mathbf{x})=c_i(w_i,\mathbf{x})-c_{i+1}(w_i,\mathbf{x}),\quad i=1,\dots,n-1,$$

применяя который определим (однозначное) отображение $\varphi:\Delta^{(n-1)}\to[0,1]^{(n-1)}$, для $x_i>0,x_{i+1}>0$, $i=1,\dots,n-1$ полагая

$$\varphi_i(\mathbf{x})=\begin{cases} w_i+\frac{x_{i+1}}{2}\cdot\frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & h_i(\mathbf{x})\ge 0,\\ w_i-\frac{x_i}{2}\cdot\frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & h_i(\mathbf{x})<0.\end{cases}\tag{1}$$

При $x_i\cdot x_{i+1}=0$ положим

$$\varphi_i(\mathbf{x})=\begin{cases} w_i+\frac{x_{i+1}}{2}=\lim\limits_{0<y_i\to+0}\varphi_i(y_i|\mathbf{x}), & \text{если}\ \ x_i=0,\ \ x_{i+1}>0,\\ w_i-\frac{x_i}{2}=\lim\limits_{0<y_{i+1}\to+0}\varphi_i(y_{i+1}|\mathbf{x}), & \text{если}\ \ x_i>0,\ \ x_{i+1}=0,\\ w_i=\lim\limits_{0\ll(y_i,y_{i+1})\to+0}\varphi_i(y_i,y_{i+1}|\mathbf{x}), & \text{если}\ \ x_i=0,\ \ x_{i+1}=0,\end{cases}$$

Образное представление об отображении φ представлено на диаграмме **??**, случай (a). Непрерывность $\varphi(\cdot)$ проверяется непосредственно. Кроме того, по построению для $w_i\le w_{i+1}$ имеем $\varphi_i(\mathbf{x})\le\varphi_{i+1}(\mathbf{x})$ $\forall i$. Значит, отображение

$$\psi(\mathbf{x})=(\psi_i(\mathbf{x}))_{i=1,\dots,n}=(\varphi_i(\mathbf{x})-\varphi_{i-1}(\mathbf{x}))_{i=1,\dots,n},$$

[1] В силу $\operatorname{supp}(\mu)=[0,1]$ требование непустой внутренности эквивалентно ненулевой меры (массы) для стран в разбиении. Возможно последнее более предпочтительно для формулировки общей задачи пространственного деления.

где по определению $\varphi_0(\mathbf{x}) = 0$ и $\varphi_n(\mathbf{x}) = 1$, непрерывно, определено и принимает значения в $\Delta^{(n-1)}$. Следовательно, мы находимся в условиях классической теоремы Брауэра, что означает существование неподвижной точки

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_n(\mathbf{x})) \in \Delta^{(n-1)}.$$

Далее покажем, что этой точке соответствует иммиграционно состоятельное разбиение на страны такое, что $x_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$, т. е. все страны имеют ненулевой размер. Начнём со второй части.

Предположим существует страна нулевого размера. Так как $(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^{(n-1)}$, то тогда найдётся пара x_i, x_{i+1} такая, что ровно одна из этих величин отлична от нуля. Пусть, например, $x_i = 0$ и $x_{i+1} > 0$, $x_{i-1} > 0$. Тогда из построения ψ и свойства неподвижной точки заключаем

$$w_i - w_{i-1} = x_i = \psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{x}) =$$
$$= w_i + \frac{x_{i+1}}{2} - \left(w_{i-1} - \frac{x_{i-1}}{2}\right) = w_i - w_{i-1} + \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2},$$

что невозможно (правая часть строго больше левой). Прочие возможности анализируются подобным образом. Полученные противоречия доказывают, что неподвижная точка лежит во внутренности симплекса.

Чтобы установить иммиграционную состоятельность, предположим противное ($\exists i \mid h_i(\mathbf{x}) \neq 0$) и вновь воспользуемся свойствами неподвижной точки. Тогда для *наименьшего* i такого, что $h_i(\mathbf{x}) \neq 0$ по построению имеем $\varphi_{i-1}(\mathbf{x}) = w_{i-1}$ и, значит, при $h_i(\mathbf{x}) > 0$ находим

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_{i-1}(\mathbf{x}) = w_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1 + h_i(\mathbf{x})} - w_{i-1} = x_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1 + h_i(\mathbf{x})} > x_i.$$

Аналогично,

$$\psi_i(\mathbf{x}) = x_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x}) - 1} < x_i$$

при $h_i(\mathbf{x}) < 0$. Оба случая невозможны, что и доказывает иммиграционную состоятельность разбиения. Теорема доказана. ■

Замечание 1 Предложенная выше конструкция отображения ψ основана на отображении φ, которое имеет простой содержательный смысл: граница страны с высокими издержками сдвигается в сторону страны с низкими издержками — таким образом происходит как бы «оккупация новых территорий». Этот принцип может показаться не совсем логичным, ибо, в частности, он может означать «захват территории» и жителей малой группой населения у большой группы. Более логичным представляется обратный принцип добровольного присоединения, когда граждане страны с высокими издержками меняют свою юрисдикцию на страну с более низкими. Математически это выглядит таким образом: $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & h_i(\mathbf{x}) \geq 0 \\ w_i + \frac{x_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & h_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Однако при этом построении появляется одна существенная проблема: наличие патологических неподвижных точек, включающих в себя страны нулевой длины, что

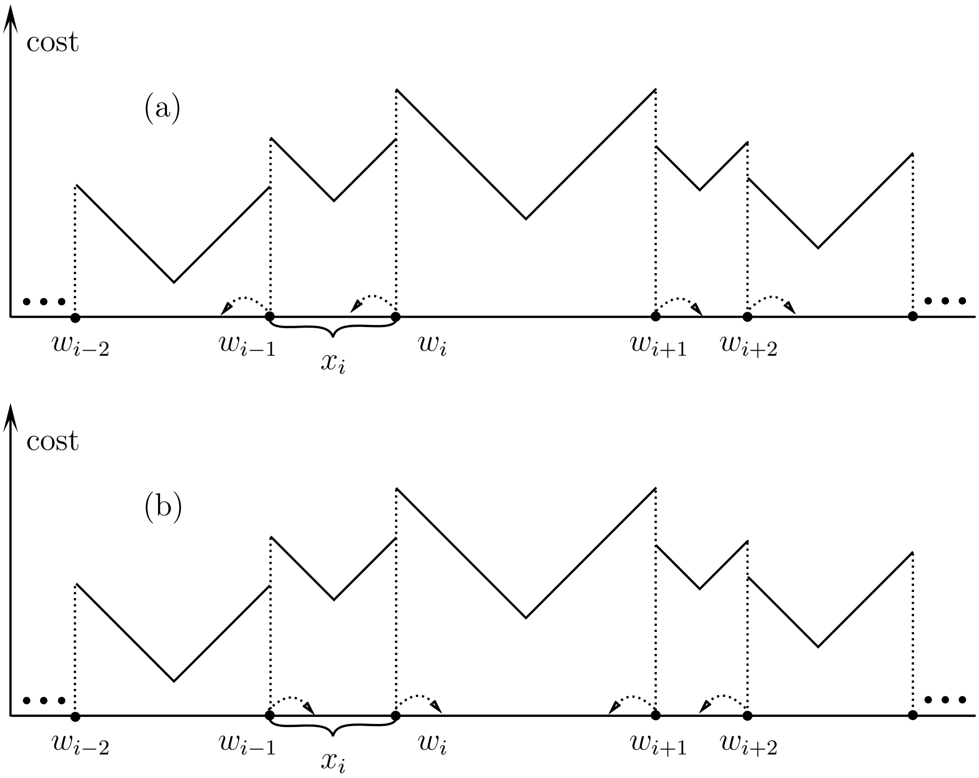

Рис. 1: Трансформация текущего по-странового деления: (a) соответствует теореме **??**, а (b) — возможный, но не реализованный случай.

не может нас устроить. Например, такой точкой является $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1)$, т. е. ситуация, когда все страны кроме одной имеют нулевую длину. Эту трудность можно преодолеть путём дополнительного построения, однако это влечёт существенное усложнение конструкции, что в одномерном случае нерационально. Тем не менее этот вариант применяется ниже, в рамках построений для двумерной области (использованный в «одномерной» теореме здесь не проходит). ■

2 Деление на две страны на плоскости

Безусловно, деление одномерного мира на страны нельзя признать вполне удовлетворительным решением вопроса. Однако двумерная постановка представляется принципиально более трудной задачей. Далее на частном примере деления прямоугольной области на две страны мы рассмотрим аппроксимирующую конструкцию, позволяющую найти решение путём предельного перехода.

Сначала определим принцип стабильности, заложенный в концепцию страны размещённой на плоскости. Как и в случае одномерного мира это должно быть такое деление, чтобы у пограничных жителей не было стимула менять свою юрисдикцию. Таким образом, затраты у пограничного жителя должны быть одинаковыми по отношению к любой из возможных для него юрисдикций. При этом предполагается, что границы между странами допускают непрерывную параметризацию, т. е. являются образом интервала из $\mathbb{R}$ при некотором *непрерывном взаимнооднозначном* отображении. В итоге, как и в одномерном случае, функция индивидуальных затрат индивидов должна быть непрерывной *на всей области* по-странового деления, т. е. разбиение должно реализовывать непрерывную «склейку» по-страновых индивидуальных затрат.

Итак, для простоты рассмотрим частный случай прямоугольной зоны возможного расселения, представленной на диаграмме **??** прямоугольником $\square ABCD$. Далее всюду предполагается

(**P**) *Распределение населения описывается вероятностной абсолютно непрерывной мерой μ такой, что* $\mathrm{supp}(\mu) = \square ABCD$.[2]

2.1 Общее решение: одномерная аппроксимация

Идея конструкции состоит в том, чтобы при заданной (потенциально криволинейной) координатной системе вдоль каждой координатной линии появлялось устойчивое разбиение в смысле одномерного мира. При этом, однако, функция индивидуальных затрат должна быть рассчитана относительно положения «центра» страны и распределённой общей массы населения в *двумерном пространстве*. Нахождение такого разбиения является не простой задачей, которую мы будем решать применяя специальную «одномерную» аппроксимацию, по-страновое разбиение которой находится с помощью теоремы Какутани о неподвижной точке.

Конструкция следующая: проведём $n-2$ прямых линий параллельно основанию прямоугольника, $n \geq 3$. Пусть нижнее основание имеет номер «n», верхнее — «1», и все прочие нумеруются сверху вниз. Каждый i-й отрезок делится на две части точкой x_i, которую можно считать величиной из отрезка $[0,1]$ (длина основания $\square ABCD$), $i = 1, \ldots, n$. Прямолинейные отрезки, соединяющие последовательно точки $x_1, \ldots, x_n$, образуют ломанную кривую, которую мы принимаем в качестве допустимой границы между левой и правой страной. Теперь при наличии плотности $f(x,y)$ можно её проинтегрировать по каждой из странообразующих областей, находя тем самым массу (численность) $\mu(S)$ их населения. В пределах каждой из стран находится «центр» (столица) $r_c(S) \in S$, положение которого мы будем считать *непрерывно зависящим* от задающих страны параметров $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$. Таким образом имеем:

$$\mu(\mathbf{S_{left}}) = \int_{\mathbf{S_{left}}} f(x,y)dxdy \geq 0, \quad r_c(\mathbf{S_{left}}) = r_{\mathbf{left}}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{S_{left}}$$

$$\mu(\mathbf{S_{right}}) = \int_{\mathbf{S_{right}}} f(x,y)dxdy \geq 0, \quad r_c(\mathbf{S_{right}}) = r_{\mathbf{right}}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{S_{right}}.$$

Кроме того, без ограничения общности

$$\mu(\mathbf{S_{left}}) + \mu(\mathbf{S_{right}}) = 1.$$

На самом деле то что мы говорим о «массе населения» страны (численности популяции) и «расстояния до центра» (транспортной доступности столицы) как основных параметрах, определяющих затраты индивидуумов, то это всего лишь интерпретация функции затрат в контексте основного модельного варианта. То же относится к свойству центра страны располагаться на её территории — это всего лишь содержательно естественный вариант, с математической точки зрения центр может быть где угодно. То что является действительно важным, так это (описанные ниже) определённые свойства функции индивидуальных затрат.

[2]Это в совокупности означает, что $\mu(A) > 0 \iff \int_A dxdy > 0$ для каждого измеримого $A \subseteq \square ABCD$.

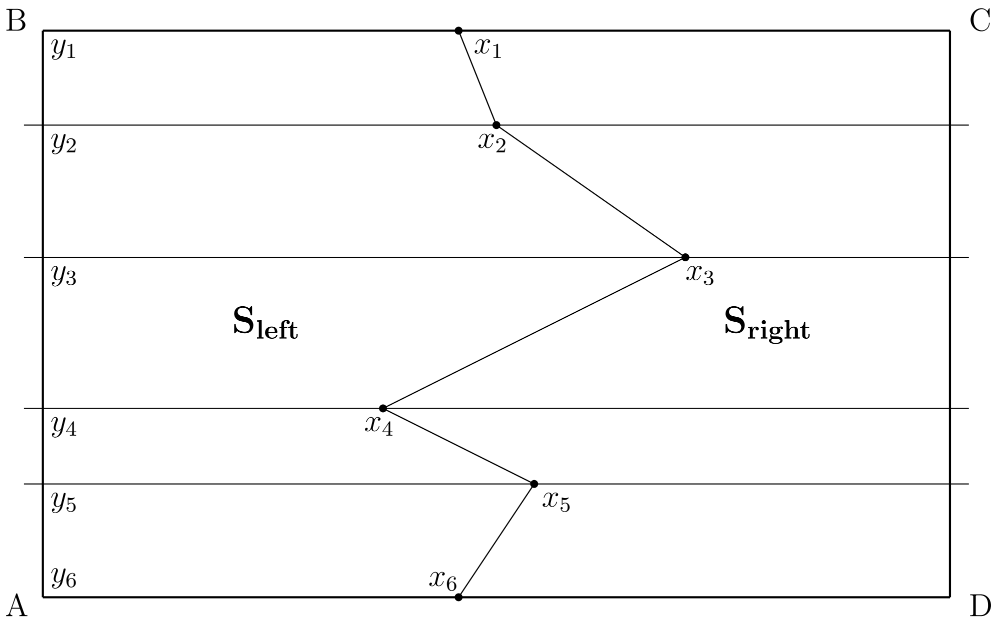

Рис. 2: *Деление на две страны прямоугольной области $ABCD$, $n = 6$*

Рассмотрим далее конструкцию точечно-множественного отображения, чья неподвижная точка даёт искомое по-страновое разбиение. Это отображение строится похожим на одномерный случай образом. Положим

$$X = [0, 1]^n,$$

и определим точечно-множественное отображение из X в себя.

Пусть $c_1(\cdot)$, $c_2(\cdot)$ — функции индивидуальных затрат, зависящие от массы резидентов юрисдикции $\mu_1(\mathbf{x})$, $\mu_2(\mathbf{x})$, расположения её центра $r_c(S_1)$, $r_c(S_2)$, метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ (чтобы определить расстояние до центра) и места жительства данного индивида — задано координатами $(x, y) \in \square ABCD$. Основным модельным представлением этих функций является

$$c_k(x, y, \mu(S_k), r_c(S_k)) = \frac{g_k}{\mu(S_k)} + \rho((x, y), r_c(S_k)), \quad g_k > 0, \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

Далее мы будем считать, что функции затрат $c_k(x, y, \cdot)$, $k = 1, 2$ это функции достаточно общего вида, непрерывно зависящие от $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ при $\mu(S_k(\mathbf{x})) > 0$, $k = 1, 2$. Дополнительно предположим, что

(*i*) $c_k(x, y, \mathbf{x}) > 0$ при $\mu(S_k) \neq 0$ и

(*ii*) $c_k(x, y, \mathbf{x}) \to +\infty$ при $\mu(S_k) \to 0$, $k = 1, 2$.

Для функций вида (**??**) это условие всегда выполнено. В то же время если плотность $f(x, y)$ населения такая, что $\int_A dxdy > 0$ влечёт $\int_A f(x, y)dxdy > 0$ для каждого измеримого подмножества $A \subset \square ABCD$ (т. е. каждое подмножество ненулевой площади (мера Лебега) имеет население ненулевой массы), то последнее требование будет эквивалентно

$$c_1(x, y, \mathbf{x}) \to +\infty \iff \mathbf{x} \to (0, \dots, 0) \ \ \& \ \ c_2(x, y, \mathbf{x}) \to +\infty \iff \mathbf{x} \to (1, \dots, 1). \tag{3}$$

Как и в одномерном случае в граничных точках $x_1, \dots, x_n$ рассмотренных областей найдём эксцесс затрат возможных (двух) юрисдикций (постоянные величины $y_1, \dots, y_n$ в аргументе исключены)

$$h_i(\mathbf{x}) = c_1(x_i, \mathbf{x}) - c_2(x_i, \mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что из (**??**) следует, что при $\mathbf{x} \to 0$ должно быть $h_i(\mathbf{x}) \to +\infty$, а $\mathbf{x} \to \mathbf{1}$ влечёт $h_i(\mathbf{x}) \to -\infty$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Далее определим (однозначное) отображение $\varphi : X \to X = [0,1]^n$ полагая

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & \text{если} \;\; h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ x_i + \frac{1-x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & \text{если} \;\; h_i(\mathbf{x}) \leq 0. \end{cases} \tag{4}$$

По построению это отображение корректно определено всюду на X за исключением двух точек, это $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ и $\mathbf{x} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, значения в которых зададим по непрерывности:

$$\varphi(\mathbf{0}) = (0, \dots, 0), \quad \varphi(\mathbf{1}) = (1, \dots, 1).$$

Очевидно, что по построению эти точки являются *тривиальными* неподвижными точками $\varphi(\cdot)$, которые не соответствуют требуемому решению задачи деления прямоугольной области. Ближайшие построения и анализ будут посвящены нахождению *нетривиальной* неподвижной точки, соответствующей делению области на две страны с ненулевыми массами населения.

Замечание 2 Попытка применить двумерный аналог одномерной формулы (**??**) приводит к следующему построению ключевого отображения:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_i + \frac{1-x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{1+h_i(\mathbf{x})}, & h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ x_i - \frac{x_i}{2} \cdot \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, & h_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Однако здесь появляются свои трудности и логически возможны патологические неподвижные точки у которых переменные x_i принимают только значения 0 при $h_i(\mathbf{x}) < 0$ и 1 при $h_i(\mathbf{x}) > 0$. А вот значений x_i таких, что $h_i(\mathbf{x}) = 0$ может не быть вообще... ■

Определим точечно-множественное отображение Φ из $\mathfrak{X} = X \times \Delta_2$ в X по формуле: для $(\mu_1, \mu_2) = (\mu(\mathbf{S_{left}}(\mathbf{x})), \mu(\mathbf{S_{right}}(\mathbf{x})))$ положим

$$\Phi(\mathbf{x}, \nu) = \begin{cases} \{\frac{\nu_1}{\mu_1}\varphi(\mathbf{x})\}, & \text{при} \;\; \nu_1 \leq \mu_1, \;\; \mu_1 \neq 0, \\ \{\frac{\nu_2}{\mu_2}\varphi(\mathbf{x}) + \frac{\mu_2 - \nu_2}{\mu_2}(1, \dots, 1)\}, & \text{при} \;\; \nu_2 \leq \mu_2, \;\; \mu_2 \neq 0, \\ X, & \text{при} \;\; \nu_1 = \mu_1 = 0, \;\; \text{или} \;\; \nu_1 = \mu_1 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Отображение $\Psi : X \rightrightarrows \Delta_2$ зададим по формуле

$$\Psi(\mathbf{x}) = \underset{\nu \in \Delta_2}{\operatorname{argmax}} \langle H(\mathbf{x}), \nu \rangle. \tag{6}$$

где $H(\mathbf{x}) = (H_1(\mathbf{x}), H_2(\mathbf{x}))$ при

$$I_+ = \{i \mid h_i(\mathbf{x}) \geq 0, \; i = 1, \dots, n\}, \quad I_- = \{i \mid h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, \dots, n\}$$

определяется по формуле[3]

$$H_1(\mathbf{x}) = [\inf_{i=1,\dots,n} h_i(\mathbf{x})]^+ + \sum_{i\in I_+} x_i \tfrac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})+1}, \qquad I_+ \neq \emptyset$$
$$H_2(\mathbf{x}) = [\sup_{i=1,\dots,n} h_i(\mathbf{x})]^- + \sum_{i\in I_-} (1-x_i) \tfrac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})-1}, \qquad I_- \neq \emptyset.$$

Если $I_+ = \emptyset$ или $I_- = \emptyset$, то по определению $H_1(\mathbf{x}) = 0$ и $H_2(\mathbf{x}) = 0$ соответственно. Построенное отображение определено корректно всюду, за исключением нуля и единицы, в которых полагаем

$$\Psi(\mathbf{0}) = (1, 0), \qquad \Psi(\mathbf{1}) = (0, 1).$$

Наконец, зададим итоговое отображение

$$\Upsilon : \mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{X}, \qquad \Upsilon(\mathbf{x}, \nu) = \Phi(\mathbf{x}, \nu) \times \Psi(\mathbf{x}, \nu),$$

неподвижные точки которого и дадут искомый результат. Следующие леммы описывают важные свойства отображения $\Upsilon(\cdot)$.

Лемма 1 *Отображение $\Upsilon : \mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{X}$ является отображением Какутани, т. е. имеет замкнутый график и для всех $\kappa \in \mathfrak{X}$ принимает непустые выпуклые значения.*

Доказательство леммы **??**. Проверки требуют свойства отображения $\Psi(\cdot)$. Покажем, что оно имеет замкнутый график. Сначала установим непрерывность $H = (H_1, H_2)$. С этой целью рассмотрим функции

$$g^-(t) = \begin{cases} \frac{t}{t-1}, & \text{при } t \le 0, \\ 0, & \text{при } t \ge 0, \end{cases} \qquad g^+(t) = \begin{cases} \frac{t}{t+1}, & \text{при } t \ge 0, \\ 0, & \text{при } t \le 0, \end{cases}$$

которые непрерывны на $[-\infty, +\infty]$. Из построения теперь можно записать

$$H_1(\mathbf{x}) = [\inf_{i=1,\dots,n} h_i(\mathbf{x})]^+ + \sum_{i=1,\dots,n} x_i \cdot g^+(h_i(\mathbf{x})),$$

$$H_2(\mathbf{x}) = [\sup_{i=1,\dots,n} h_i(\mathbf{x})]^- + \sum_{i=1,\dots,n} (1-x_i) g^-(h_i(\mathbf{x})).$$

Данная форма представления с очевидностью влечёт непрерывность $H(\cdot)$ во всех точках кроме как $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Значит, всюду на X, за исключением этих точек, $\Psi(\cdot)$ замкнутое. Оно будет также замкнуто и в нуле, так как по построению (за счёт первого слагаемого) $H_1(\mathbf{x}) > 0$ и $H_2(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x}$ достаточно близких к нулю. Следовательно, в некоторой окрестности нуля $\Psi(\mathbf{x}) \equiv (1, 0)$, что и означает замкнутость $\Psi(\cdot)$ в точке нуль. Замкнутость в единице проверяется подобным образом.

Прочие требуемые свойства отображения $\Upsilon(\cdot)$ устанавливаются путём рутинной проверки определений. Лемма доказана. ■

Лемма 2 *При сделанных выше предположениях отображение $\varphi(\cdot)$ имеет* ***нетривиальную*** *неподвижную точку на X такую, что масса населения каждой страны* ***ненулевая****.*

[3] Здесь стандартным образом $z^+ = \sup\{z, 0\}$ и $z^- = \sup\{(-z), 0\}$ для любого действительного z.

Замечание 3 Отображение $\varphi(\cdot)$ можно распространить с конечномерного пространства на пространство непрерывных функций следующим образом. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F} : C([0,1]) \to [0,1]$, заданное формулой: для непрерывного $f : [0,1] \to [0,1]$ положим

$$\mathfrak{F}(f)(y) = \begin{cases} f(y) - \frac{f(y)}{2} \cdot \frac{h(f,x,y)}{1+h(f,x,y)}, & \text{если} \ \ h(f,x,y) \geq 0, \\ f(y) + \frac{1-f(y)}{2} \cdot \frac{h(f,x,y)}{h(f,x,y)-1}, & \text{если} \ \ h(f,x,y) \leq 0. \end{cases}$$

Здесь границей между странами является график функции f, т. е.

$$\mathbf{S}_{\mathbf{left}} = \{(x,y) \in \Box ABCD \mid x \leq f(y)\} \quad \& \quad \mathbf{S}_{\mathbf{right}} = \Box ABCD \setminus \mathbf{S}_{\mathbf{left}}.$$

Однако доказать существование неподвижной точки у $\mathfrak{F}$ в описанном абстрактном виде весьма затруднительно, что связано с характеризацией компактных множеств в пространстве непрерывных функций (требуется равностепенная непрерывность) и отсутствием значимых мотивов для компактной локализации неподвижной точки. ■

Доказательство леммы **??**. Возьмём любую неподвижную точку

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\nu}) \in \Upsilon(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\nu}),$$

которая существует в силу леммы **??** и теоремы Какутани. Докажем, что для этой точки выполнено

$$0 < \bar{\nu}_1 < 1 \quad \& \quad \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{1}. \tag{7}$$

Предположим, что первая страна имеет нулевую массу населения, т. е. $\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(\bar{\mathbf{x}})) = \mu_1 = 0$. Это возможно только если $\bar{\mathbf{x}} = 0$ и, значит, $h_i(\bar{\mathbf{x}}) = +\infty$ $\forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow H_1(\bar{\mathbf{x}}) > 0$ и $H_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. По формуле (**??**) и свойствам неподвижной точки заключаем $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) = (1, 0)$ откуда из построения (**??**) в случае $\nu_1 = 1 \geq 0 = \mu_1$ при $\mu_2 = 1$, $\nu_2 = 0$ имеем

$$\frac{\bar{\nu}_2}{\mu_2}\varphi(\mathbf{x}) + \frac{\mu_2 - \bar{\nu}_2}{\mu_2}(1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1) \neq 0 = \bar{\mathbf{x}}.$$

Полученное противоречие доказывает $\bar{\mathbf{x}} \neq 0$.

Случай второй страны с нулевой массой населения рассматривается подобным образом:

$$\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{right}}(\bar{\mathbf{x}})) = \mu_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} = (1, \ldots, 1) \quad \Rightarrow \quad h_i(\bar{\mathbf{x}}) = -\infty \ \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $H_2(\bar{\mathbf{x}}) > 0$ и $H_1(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, откуда в силу (**??**) заключаем $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) = (0, 1)$. Из построения (**??**) в случае $\nu_1 \leq \mu_1$ при $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = 0$ имеем

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\mu_1}\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = (0, \ldots, 0) \neq (1, \ldots, 1) = \bar{\mathbf{x}},$$

что доказывает (**??**). Отсюда в силу (**??**) заключаем, что $H_1(\bar{\mathbf{x}}) = H_2(\bar{\mathbf{x}})$. Покажем далее, что единственная возможность это $H_1(\bar{\mathbf{x}}) = H_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Действительно, предположим $H_1(\bar{\mathbf{x}}) = H_2(\bar{\mathbf{x}}) \neq 0$. Прежде всего отметим, что $[\inf\limits_{i=1,\ldots,n} h_i(\bar{\mathbf{x}})]^+ > 0$ невозможно, ибо тогда с необходимостью $H_1(\bar{\mathbf{x}}) > 0$ и $H_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Подобным образом невозможно $[\sup_{i=1,\dots,n} h_i(\bar{\mathbf{x}})]^- > 0$. Следовательно, оба этих слагаемых в определении H обращаются в нуль. Теперь из определения H можно заключить, что существуют i, j такие, что

$$h_i(\bar{\mathbf{x}}) > 0 \quad \& \quad \bar{x}_i \cdot \frac{h_i(\bar{\mathbf{x}})}{h_i(\bar{\mathbf{x}})+1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_i > 0,$$

$$h_j(\bar{\mathbf{x}}) < 0 \quad \& \quad (1-\bar{x}_j) \cdot \frac{h_j(\bar{\mathbf{x}})}{h_j(\bar{\mathbf{x}})-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_j < 1.$$

Далее вновь обратимся к свойствам неподвижной точки и формуле (**??**). В первом случае, при $0 < \nu_1 \le \mu_1 < 1 \Rightarrow 0 < \lambda = \frac{\nu_1}{\mu_1} \le 1$, в силу $\bar{x}_i > 0$ имеем

$$\bar{x}_i > \Phi_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\nu}) = \lambda \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda \left[\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_i}{2} \cdot \frac{h_i(\bar{\mathbf{x}})}{h_i(\bar{\mathbf{x}})+1}\right].$$

Во втором случае, при $0 < \lambda = \frac{\nu_2}{\mu_2} \le 1$, в силу $\bar{x}_j < 1$ имеем

$$\bar{x}_j < \Phi_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\nu}) = \lambda \varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) + 1 - \lambda = \lambda \left[x_j + \frac{1-\bar{x}_j}{2} \cdot \frac{h_j(\bar{\mathbf{x}})}{h_j(\bar{\mathbf{x}})-1}\right] + 1 - \lambda.$$

Оба случая невозможны. Следовательно, доказано $H_1(\bar{\mathbf{x}}) = H_2(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. По построению это эквивалентно

$$\bar{x}_i \frac{h_i(\bar{\mathbf{x}})}{h_i(\bar{\mathbf{x}})+1} = 0, \quad h_i(\bar{\mathbf{x}}) \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

$$(1-\bar{x}_j) \frac{h_j(\bar{\mathbf{x}})}{h_j(\bar{\mathbf{x}})+1} = 0 \quad h_j(\bar{\mathbf{x}}) \le 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Однако в силу (**??**) последнее означает, что найденный $\bar{\mathbf{x}} \in X$ является нетривиальной неподвижной точкой отображения $\varphi(\cdot)$. ■

Теорема 2 *Пусть индивидуальные затраты задаются формулой (**??**) и центры стран располагаются на прямой, параллельной оси абцисс. Тогда для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует деление $\square ABCD$ на две страны $\mathbf{S_{left}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{S_{right}}(\mathbf{x})$, с кусочно-линейной границей, образованной точками $x_k, \dots, x_l$, $1 < k+1 \le l-1 < n$ и иммиграционно состоятельное в точках $x_{k+1}, \dots, x_{l-1}$.*

Следствие 1 *Предположим, что затраты в формуле (**??**) рассчитаны относительно евклидова расстояния. Тогда в условиях теоремы **??** точки границы $x_{k+1}, \dots, x_{l-1}$ расположены на классической гиперболе, заданной уравнением*

$$||(x,y) - r_c(S_1)||_2 - ||(x,y) - r_c(S_2)||_2 = \frac{g_2}{\mu(S_2)} - \frac{g_1}{\mu(S_1)} = const. \tag{8}$$

В случае метрики более общего вида (например, для p-нормы) эти точки принадлежат обобщённой гиперболе.

Доказательство теоремы **??**. Рассмотрим неподвижную точку

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \varphi(\mathbf{x}),$$

удовлетворяющую заключению леммы **??**. Отметим, что из построения $\varphi(\cdot)$ для каждого $i = 1, \dots, n$ (формула (**??**)) реализуется одна из трёх возможностей:

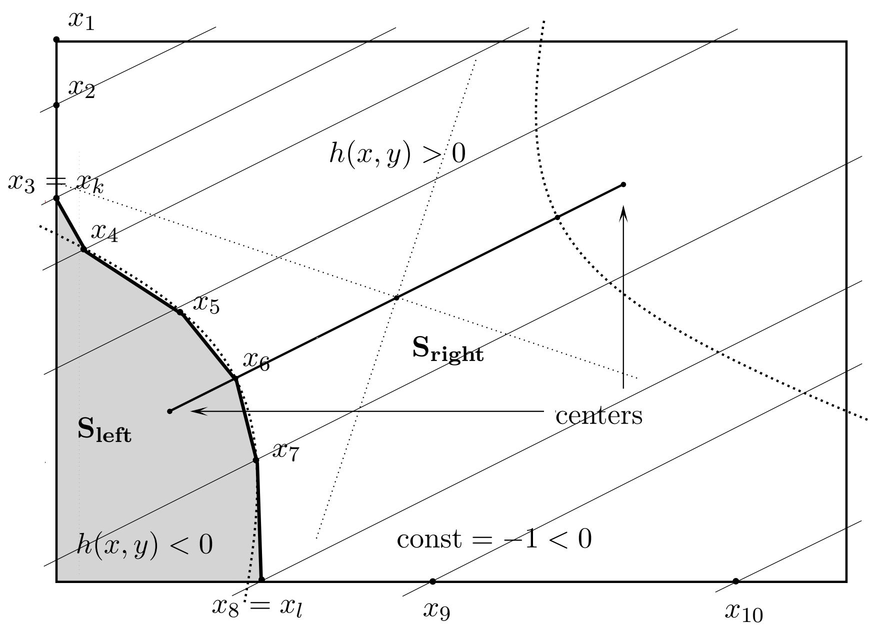

Рис. 3: Деление на страны типа (i)–(ii) при $const < 0 \iff g_2\mu(\mathbf{S_{left}}) < g_1\mu(\mathbf{S_{right}})$.

(i) $h_i(\mathbf{x}) = 0$,

(ii) $h_i(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow x_i = 0$,

(iii) $h_i(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow x_i = 1$.

Действительно, рассмотрим, например, альтернативу (ii). Предполагая противное имеем $x_i \frac{h_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})+1} > 0$, что в этом случае влечёт $x_i > \varphi_i(\mathbf{x})$. Альтернатива (iii) устанавливается подобным образом.

Рассмотрим далее альтернативу (i) и соответствующее ей множество точек x_i на координатных отрезках. Все эти точки можно описать как пересечение координатного отрезка с кривой, заданной уравнением

$$h(x,y) = c_1(x,y,\mathbf{x}) - c_2(x,y,\mathbf{x}) = 0,$$

где $\mathbf{x}$ можно считать постоянной величиной. Точнее, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$ играет здесь роль задающих кривую параметров в наиболее общем виде. Чтобы пояснить мысль и сформулировать конкретный результат обратимся к анализу частного случая, заданного в формуле (**??**), напомним:

$$c_k(x,y,\mu(S_k),r_c(S_k)) = \frac{g_k}{\mu(S_k)} + \rho((x,y),r_c(S_k)), \quad g_k > 0, \quad k = 1,2.$$

Здесь интересующая нас кривая полностью определяется массой населения $\mu(S_k)$ и центрами $r_c(S_k)$ двух стран $k = 1,2$. Оба эти параметра являются непрерывными функциями от $\mathbf{x}$. Для заданной неподвижной точки они фиксированы. Поэтому в случае евклидова расстояния на плоскости уравнение кривой задаёт классическую *гиперболу* (геометрическое определение), которая и является границей между странами:

$$h(x,y) = 0 \iff ||(x,y) - r_c(S_1)||_2 - ||(x,y) - r_c(S_2)||_2 = \frac{g_2}{\mu(S_2)} - \frac{g_1}{\mu(S_1)} = const.$$

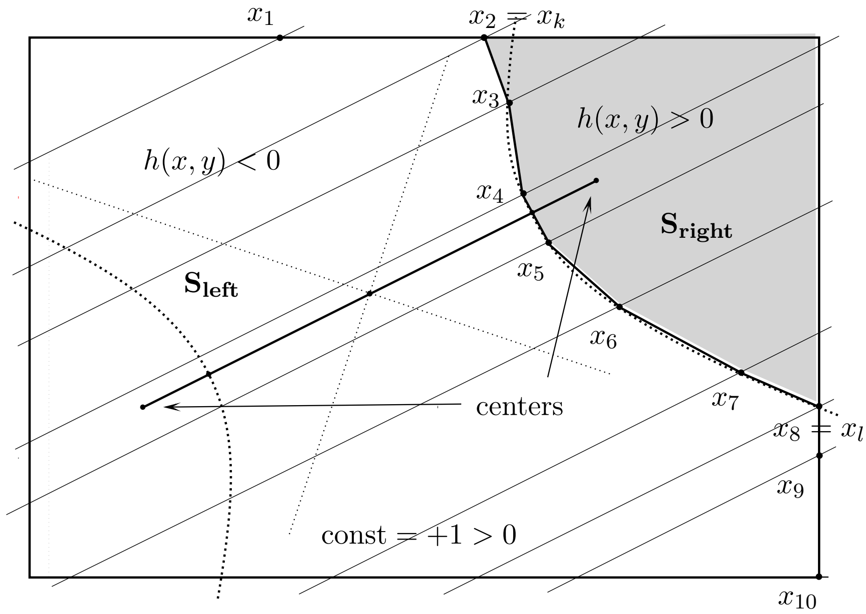

Рис. 4: Деление на страны типа (i) & (iii) при $const > 0 \iff g_2\mu(\mathbf{S_{left}}) > g_1\mu(\mathbf{S_{right}})$.

При этом знак константы определяет которую из двух ветвей нужно взять — ближайшая к первому центру ветвь используется при отрицательной константе и наоборот. Описанную ситуацию иллюстрируют рис. **??**, **??**, на которых представлены полярные случаи границы–гиперболы с отрицательной и положительной правой частью. При этом в первом случае реализованы альтернативы $(i) - (ii)$, а во втором — (i) и (iii). Конечно, возможен и случай (i) в чистом виде. Отметим также, что варианты (ii) и (iii) одновременно не встречаются: это следует из выпуклости прямоугольной области и выпуклости одной из ограниченных гиперболой областей.

И последнее. Так как центры стран расположены на общей прямой параллельной основанию, то эта прямая параллельна координатным отрезкам и, следовательно, каждый из этих отрезков имеет *единственную* точку пересечения с гиперболой или вообще с ней не пересекается (случаи (ii) и (iii)). Это устанавливает существование номеров k и l с указанными в теореме свойствами. Теорема **??** доказана. ■

Теорема 3 *Пусть в прямоугольнике $\square ABCD$ индивидуальные затраты задаются формулой (**??**) и центры стран расположены на прямой параллельной оси абсцисс. Тогда существует иммиграционно состоятельное деление на две страны $\mathbf{S_{left}}$ и $\mathbf{S_{right}}$ с непрерывной границей.*

Замечание 4 Тот факт, что рассматривается прямоугольная область является несущественным. Данный результат имеет место для любой выпуклой ограниченной замкнутой области. Отсюда также следует, что центры могут располагаться на любой фиксированной прямой (поверните область так, чтобы прямая была параллельна оси абсцисс) — в том числе это может быть *любая пара фиксированных точек*[4].

[4]Заметьте, что это одно из принципиальных отличий двумерной постановки от одномерной: здесь возможно деление на страны при фиксированных столицах и условии о принадлежности столицы территории страны (т. е. столица не является анклавом). Это происходит по той причине, что гиперболическая граница при фиксированных фокусах может выделять сколь угодно малую по площади область.

На самом деле и этот результат можно обобщить и потребовать всего лишь непрерывную зависимость центров от параметров страны, но это потребует уже существенной переработки доказательства. Простейший метод состоит в том, чтобы рассмотреть подвижные координатные прямые, параллельные прямой, проходящей через центры стран. ■

Доказательство теоремы **??**. Рассмотрим возрастающее семейство

$$Y_\xi \subset Y_{\xi+1} \subset [0,1], \quad \xi = 1, 2, \ldots$$

точек на оси ординат, определяющих межстрановую кусочно–линейную границу. Выберем семейство так, чтобы

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\xi\in\mathbb{N}} Y_\xi\right) = [0,1].$$

Для каждого $\xi \in \mathbb{N}$ имеет место лемма **??**, откуда следует, что для каждого ξ определена гипербола (**??**), заданная параметрами центра страны (фокусы) $r_c(\mathbf{S}^\xi_{\mathbf{left}})$, $r_c(\mathbf{S}^\xi_{\mathbf{right}})$ и «массы» населения $\mu(\mathbf{S}^\xi_{\mathbf{left}})$, $\mu(\mathbf{S}^\xi_{\mathbf{right}})$ (определяют правую часть в (**??**)). Эти параметры меняются ограниченно и, следовательно, содержат сходящиеся подпоследовательности. Без ограничения общности можно считать, что сами эти последовательности сходятся. Предельные значения параметров

$$\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{k} = \lim_\xi r_c(\mathbf{S}^\xi_\mathbf{k}), \quad \bar{\mu}_\mathbf{k} = \lim_\xi \mu_k(\mathbf{S}^\xi_\mathbf{k}), \quad k = 1, 2$$

определяют предельную гиперболу. В отношении этой гиперболы несложно доказывается два ключевых факта, дающих искомый результат:

(*i*) $\bar{\mu}_\mathbf{k} \neq 0$, $k = 1, 2$ — доказательство от противного, приходя к противоречию со свойством неподвижной точки $\mathbf{x}_\xi \in \varphi(\mathbf{x}_\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Пусть $\bar{\xi} \in \mathbb{N}$ и $y_{\bar{\xi}} \in Y_{\bar{\xi}}$ фиксированы. Так как $Y_{\bar{\xi}} \subset Y_\xi \ \forall \xi \geq \bar{\xi}$, то определена последовательность $(x_\xi, y_{\bar{\xi}})$, $\xi \geq \bar{\xi}$ точек, удовлетворяющих всем соотношениям неподвижной точки. На прямоугольнике это будут, начиная с некоторого номера, либо точки расположенные на левой или правой стороне, либо пара $(x_\xi, y_{\bar{\xi}})$ находится на ξ-й гиперболе (пересечение $\bar{\xi}$-го отрезка с гиперболой). Так как гиперболы сходятся к предельному варианту, то и их (единственные!) точки пересечения с фиксированной прямой будут сходится, т. е. $(x_\xi, y_{\bar{\xi}}) \to (\bar{x}_{\bar{\xi}}, y_{\bar{\xi}})$, $\xi \to \infty$. Наконец заметим, что полученные таким образом пары образуют плотное подмножество на предельной кривой, являющейся нетривиальной неподвижной точкой отображения $\mathfrak{F} : C([0,1]) \to [0,1]$, описанного в замечании **??**. Следовательно, предельные значения массы населения $\bar{\mu}_\mathbf{k} = \lim_\xi \mu_k(\mathbf{S}^\xi_\mathbf{k})$, $k = 1, 2$ для стран с линейно–ломанной границей *совпадают* с численностью (массой) населения областей ограниченных предельной гиперболой.

Таким образом, найдена нетривиальная неподвижная точка отображения $\mathfrak{F}$ — это отображение, график которого состоит из (непустого) пересечения гиперболы с областью и, возможно, двух вертикальных отрезков. Указанный фрагмент гиперболы и является искомой границей двух стран. Теорема **??** доказана. ■

2.2 Частное решение для гиперболических границ

В настоящем разделе мы рассмотрим ещё одно доказательство иммиграционно состоятельного деления на две страны, учитывающее специфический тип границы,

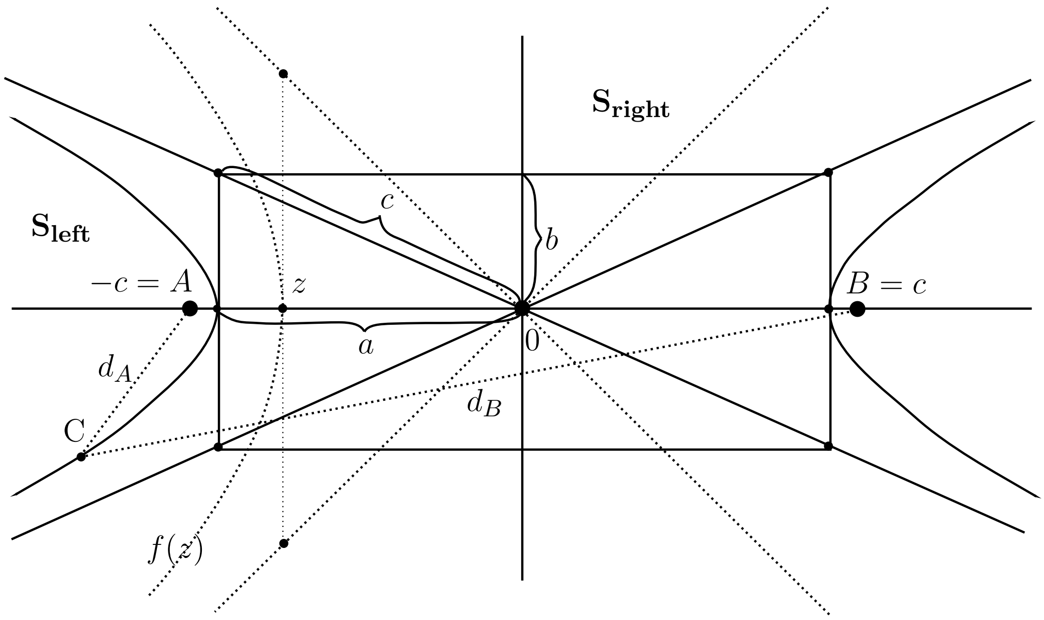

Рис. 5: Гипербола $f(z)$ с фокусами в A и B

обусловленной представлением функции затрат (**??**) и, как следствие, границы гиперболического типа (**??**). Для евклидового расстояния (**??**) определяет классическую гиперболу. Применяя специфические свойства этой кривой мы предложим простейшее краткое доказательство. Далее сначала напомним некоторые общеизвестные факты, см. рис. **??**.

Фокусы гиперболы расположены в точках $A = (-c, 0)$ и $B = (c, 0)$, вершины в $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ при действительной $a > 0$ и мнимой полуоси $b > 0$; величины связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$. Текущая точка C на левой ветви гиперболы обладает тем свойством, что $\rho(C, A) - \rho(C, B) = d_A - d_B = -2a$ — это конечно то же, что и разница расстояний от левой вершины до левого фокуса и расстояние до правого фокуса. Отметим, что при фиксированных фокусах гиперболу и её конкретную ветвь можно полностью определить задавая вершину нужной ветви: на рисунке **??** точка $z \in [-c, c]$ определяет левую ветвь с параметрами $a = -z$, $b = \sqrt{c^2 - z^2}$ (при $z \geq 0$ и $a = z$ так задаётся правая ветвь).

В контексте задачи деления области на страны с центрами этих стран — фокусами гиперболы — на соединяющих их отрезке можно определить следующее отображение:

$$H(z) = \frac{\mathbf{g}_{\mathbf{right}}}{\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{right}}(z))} - \frac{\mathbf{g}_{\mathbf{left}}}{\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(z))} - 2z, \quad z \in (-c, c).$$

Здесь $\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{right}}(z))$ и $\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(z))$ это масса жителей страны, чьей границей является гипербола — $\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(z)$ и $\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(z)$, соответственно. Очевидно, это положительно-значные непрерывные функции от $z \in (-c, c)$. Также очевидно, что

$$\lim_{z \to -c} H(z) = -\infty \quad \& \quad \lim_{z \to c} H(z) = +\infty.$$

Однако теперь из непрерывности $H(z)$ следует, что существует точка $\bar{z} \in (-c, c)$ такая, что $H(\bar{z}) = 0$ и, значит,

$$\frac{\mathbf{g}_{\mathbf{right}}}{\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{right}}(\bar{z}))} - \frac{\mathbf{g}_{\mathbf{left}}}{\mu(\mathbf{S}_{\mathbf{left}}(\bar{z}))} = 2\bar{z}.$$

Однако для точек гиперболы f с вершиной в $(\bar{z}, 0)$ имеем

$$\forall (x,y) \in f \quad ||(x,y) - A||_2 - ||(x,y) - B||_2 = 2\bar{z} = \frac{\mathbf{g_{right}}}{\mu(\mathbf{S_{right}}(\bar{z}))} - \frac{\mathbf{g_{left}}}{\mu(\mathbf{S_{left}}(\bar{z}))} \quad \Rightarrow$$

$$||(x,y) - r_c(\mathbf{S_{left}})||_2 + \frac{\mathbf{g_{left}}}{\mu(\mathbf{S_{left}})} = c_1(x,y) = c_2(x,y) = ||(x,y) - r_c(\mathbf{S_{right}})||_2 + \frac{\mathbf{g_{right}}}{\mu(\mathbf{S_{right}})},$$

что означает иммиграционную состоятельность найденного по-странового деления. Таким образом доказана

Теорема 4 *При сделанных предположениях для любой заданной выпуклой ограниченной области и любых заданных центрах существует иммиграционно состоятельное деление на* ***две страны****.*

3 Деление на три и более стран

В предыдущем разделе мы рассмотрели случай деления выпуклой ограниченной области на две страны. Рассмотрим далее случай трёх и более стран и посмотрим возможно ли на него распространить описанные или новые методы с целью нахождения иммиграционно состоятельного деления. Далее отметим важные в нашем контексте факты и свойства.

(i) Эксцесс парных затрат это

$$h_{ij}(x,y,f) = c_i(x,y,f) - c_j(x,y,f), \quad i,j = 1,2,3,$$

где $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ текущая точка в области D, а f — общее обозначение межстрановой границы, задающей значения определяющих затраты параметров (масса населения и центр страны). Из определения очевидно следует, что

$$h_{12}(x,y,f) + h_{23}(x,y,f) + h_{31}(x,y,f) = 0$$

при любых допустимых значениях (x,y,f). Существует ли геометрическое место точек такое, что $h_{ij}(x,y,f) = 0$ для всех $i,j = 1,2,3$, т. е. пересекаются ли в одной точке данные кривые безразличия?

(ii) В частном случае затрат (**??**) межстрановая граница представлена кусками гиперболы (**??**). Предположим, что центры стран фиксированы и, таким образом, в подлежащей делению области задан треугольник $\triangle ABC$, образованный центрами как вершинами. Вопрос пункта (i) теперь можно переформулировать так: пересекаются ли образующие границу гиперболы? Случай отсутствия такого пересечения вполне возможен, чтобы убедиться достаточно рассмотреть предельный для треугольника случай, когда вершины расположены на одной прямой.

(iii) Какая конфигурация гиперболической границы потенциально возможна? По определению граничные гиперболы задаются уравнениями

$$||(x,y) - r_c(\mathbf{S_i})||_2 - ||(x,y) - r_c(\mathbf{S_{i+1}})||_2 = \frac{g_{i+1}}{\mu(\mathbf{S_{i+1}})} - \frac{g_i}{\mu(\mathbf{S_i})} = d_i \quad i = 1,2,3,$$

где полагается $i = 4 \iff i = 1$. В частности отсюда следует, что $\sum d_i = 0$. Пусть $i = 1$ страна, для которой значение $\frac{g_i}{\mu(\mathbf{S_i})}$ максимально (наименьшей массы при $g_1 = g_2 = g_3$). Тогда границей этой страны по отношению к двум оставшимся

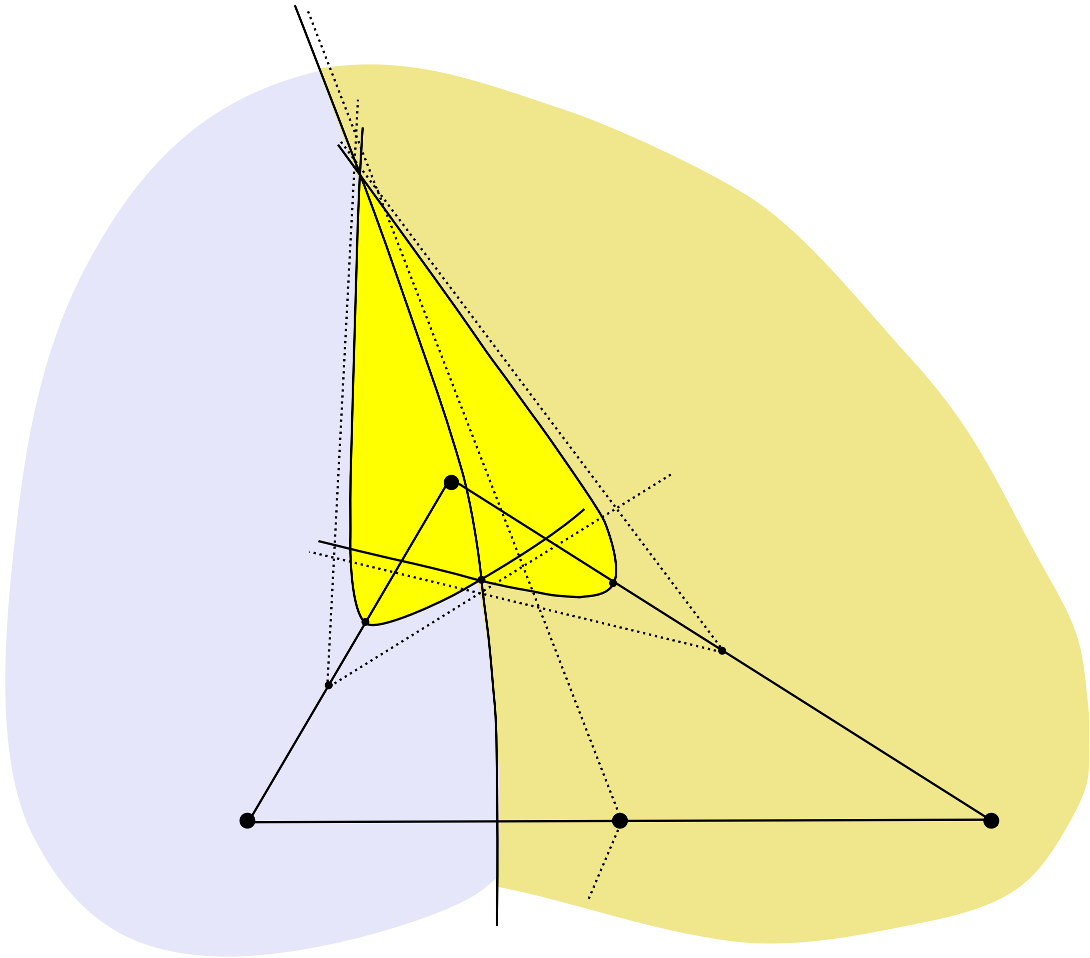

Рис. 6: Возможный вариант межстрановой границы типа «сердце».

являются ближние к данному фокусу (центру) гиперболы. Этот случай иллюстрирует рисунок **??**. Здесь важно отметить тот факт, что через точку пересечения двух гипербол непременно проходит третья гипербола. ∎

Рассмотрим далее некоторый общий метод, позволяющий установить существование иммиграционно-состоятельного деления на n стран не только на плоскости, но в любом конечномерном пространстве — это не просто возможное обобщение, но и возможность рассматривать в данном контексте и более общие задачи, например, деление по партийной принадлежности.

Начальное построение аналогично предложенному в **?**. Здесь требуется разделить область $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^l$ на n стран, $N = \{1, \ldots, n\}$. Отличие состоит в том, что функция затрат $c_i(\cdot)$ может зависеть не только от массы $\delta_i \in [0, 1]$ страны, позиции индивида $x \in \mathcal{A}$, но также ещё от дополнительных параметров $y \in Y$. В частности, в качестве y могут использоваться центры стран, а также и другие значимые в странообразовании параметры. Предполагается, что функции затрат непрерывно зависят от δ и y, причём Y — область изменения y — выпукла и компактна. Более точно, в дополнение к (**P**) (стр. **??**) предположим[5]

(**C**) *Для каждого* $i \in N$ *затраты* $c_i(\cdot) : \mathcal{A} \times Y \times \Delta^{(n-1)} \to \mathbb{R}$ *непрерывны и удовлетворяют*:

[5] Сначала можно предполагать, как это делается в **?**, что затраты измеримы относительно $x \in \mathcal{A}$, хотя во всех разумных примерах это непрерывная зависимость и это безусловно должно быть так если мы хотим получить непрерывную межстрановую границу.

(i) $c_i(x, y, \delta_1, \ldots, \delta_n) \to +\infty$ *при* $\delta_i \to 0$,

(ii) $\forall j \neq i$ *множество* $A_{ij}(y,\delta) = \{x \in \mathcal{A} \mid c_i(x,y,\delta) = c_j(x,y,\delta)\}$ *имеет нулевую меру Лебега для всех фиксированных* $(y,\delta) \in Y \times \Delta^{(n-1)}$.

Отметим отличия (**C**) от предположений, использованных в **?**: непрерывность относительно всех переменных и для (ii) — множество $A_{ij}(y,\delta)$ может зависеть от $y \in Y$ и масс других юрисдикций δ_k, $k \neq i, j$.

Идея доказательства состоит в том, что для набора $(\delta_1, \ldots, \delta_n, y)$ из *номинальных* параметров можно поставить в соответствие аналогичный набор *реальных* параметров, рассчитанный для иммиграционного стабильного деления, заданного номинальными переменными. Тем самым определяется отображение, чья нетривиальная неподвижная точка удовлетворяет всем требованиям по-странового деления. Рассмотрим далее эту конструкцию более подробно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим стандартный симплекс $\Delta^{(n-1)}$ и отображения $S_i : (\delta, y) \to S_i(\delta, y) \subset \mathcal{A}$, $(\delta, y) \in \Delta^{(n-1)} \times Y$ и $\mathcal{M} : (S_i)_{i\in N} \to (\mu_i)_{\in N}$, заданные по формулам:

$$S_i(\delta, y) = \{x \in \mathcal{A} \mid c_i(x,\delta,y) = \min_{j\in N} c_j(x,\delta,y)\}, \quad \mu_i(\delta,y) = \mu(S_i(\delta,y)), \quad i \in N.$$[6]

Имеется также непрерывное отображение $\mathcal{F} : \Delta^{(n-1)} \times Y \to Y$, что в совокупности приводит к итоговому

$$[\mathcal{M} \times \mathcal{F}](\delta, y) = \mathcal{M}(\delta, y) \times \mathcal{F}(\delta, y), \quad (\delta, y) \in \Delta^{(n-1)} \times Y.$$

Достаточно найти *нетривиальную* неподвижную точку $\bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n) \in \Delta^{(n-1)}$, $\bar{y} \in Y$ отображения $\mathcal{M}(\cdot)$, т. е.

$$\bar{y} = \mathcal{F}(\bar{y}), \quad \mu_i(\bar{\delta}, \bar{y}) = \bar{\delta}_i, \forall i \in N \ \text{ такую, что } \ \bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_n) \gg 0.$$

В **?** было показано, что

(i) отображение $\mathcal{M}(\cdot)$ непрерывно на $\Delta^{(n-1)}$ и

(ii) для некоторого $0 < \varepsilon < 1$ отображение $\mathcal{M}(\cdot)$ отображает ε-подсимплекс

$$\Delta_\varepsilon^{(n-1)} = \{\delta \in \mathbb{R}^n \mid \sum \delta_i = 1, \ \delta_i \geq \varepsilon \ \forall i \in N\}$$

таким образом, что грани ε-подсимплекса переходят в соответствующие грани исходного симплекса, т. е.

$$\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Delta_\varepsilon^{(n-1)} \ \ \& \ \ \delta_i = \varepsilon \ \implies \ \mu_i(\delta) = 0, \ \ \mathcal{M}(\delta) = (\mu_1(\delta), \ldots, \mu_n(\delta)).$$

Эти свойства могут быть легко распространены на наш случай, где требуется найти неподвижную точку отображения $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$.

Доказательство существование требуемой неподвижной точки основано на пунктах (i), (ii). Отметим, что теорема Брауэра и подобные ей неприменимы в данном случае, поскольку $\mathcal{M}(\cdot)$, определённое на $\Delta_\varepsilon^{(n-1)} \times Y$, *не* является отображением действующим *в себя*, т. е. условие $\mathcal{M}(\Delta_\varepsilon^{(n-1)} \times Y) \subseteq \Delta_\varepsilon^{(n-1)}$ *не выполняется.* Автору также неизвестно какой либо другой теоремы работоспособной в данном случае. В

[6]Здесь, как и ранее, $\mu(\cdot)$ это абсолютно непрерывная мера на A, задающая расселение населения.

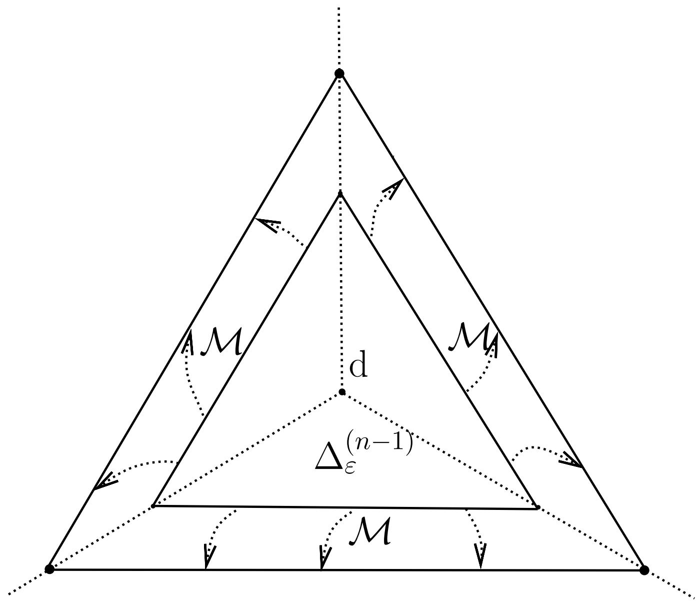

Рис. 7: Исходный, вложенный симплекс $\Delta_\varepsilon^{(n-1)}$ и отображение $\mathcal{M}(\cdot)$.

? дальнейшие рассуждения основываются на применении ККМ-леммы (Кнастера — Куратовского — Мазуркевича), что является элегантным решением вопроса, но при этом ограничено в применении частным случаем фиксированных (неизменных) столиц. В нашем случае это означает отсутствие у $\mathcal{M}$ зависимости от $y \in Y$.

Сказанное вызвало потребность в дополнительном анализе и доказательстве следующей теоремы, которую можно трактовать как (новое) обобщение теоремы Красносельского на случай многогранника (симплекса), см. **?**, и обобщения в **?**.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ *выпуклый ограниченный* многогранник и $A(M)$ его *афинная оболочка*. Пусть $d \in \mathrm{ri}M$ некоторая точка из относительной внутренности многогранника M, а F_t, $t = 1, \ldots, m$ — его грани максимальной нетривиальной размерности (на единицу меньше размерности M). С каждой гранью свяжем конус $K_t \subset A(M)$, с вершиной в точке d:

$$K_t = \{d + \lambda(\kappa - d) \mid \kappa \in F_t,\ \lambda \geq 0\} \quad \Rightarrow \quad A(M) = \underset{t=1,\ldots,m}{\cup} K_t.$$

Теорема 5 *Пусть $f : M \to A(M)$ непрерывное отображение, определённое на многограннике M и d, $A(M)$, F_t, K_t как определено выше. Пусть выполняется одно из условий:*

(*i*) *Сжатие (compressive form)*

$$f(F_t) \subset M, \quad \forall t = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

(*ii*) *Растяжение (expansive form)*

$$f(F_t) \subset K_t \setminus \mathrm{ri}M, \quad \forall t = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Тогда f имеет неподвижную точку на M.

Доказательство теоремы **??**. Рассмотрим следующую параметризацию в афинном пространстве $A(M)$, натянутом на многогранник M. Так как $A(M) = \cup_{t=1,\ldots,m} K_t$, то точку $x \in A(M)$ можно определить как $x = d + \lambda(\kappa - d)$, где действительный $\lambda > 0$ и вектор на границе многогранника $\kappa \in \cup_{t=1,\ldots,m} F_t$ по $x \neq d$

находятся взаимооднозначно. Здесь точки из многогранника определяются парами (λ, κ) при $0 \leq \lambda \leq 1$. Далее рассмотрим случаи теоремы.

(i) Сжатие. Пусть $f(\lambda, \kappa) = (\lambda', \kappa')$. Определим теперь новое отображение[7] $g(\lambda, \kappa) = (1 \wedge \lambda', \kappa')$. Очевидно, $g : M \to M$ непрерывно и в силу теоремы Брауэра имеет неподвижную точку $\bar{x} = (\bar{\lambda}, \bar{\kappa}) = g(\bar{\lambda}, \bar{\kappa})$. Эта точка является также неподвижной точкой отображения f. Действительно, различие в значениях f и g может проявится только если $\bar{\lambda} < 1$ и $\bar{\lambda}' > 1$. Но тогда $\bar{\lambda} = 1 \wedge \bar{\lambda}' = 1$, что невозможно.

(ii) Растяжение. Без ограничения общности можно считать, что $f(\lambda, \kappa) = (\lambda', \kappa')$ и $\lambda' \leq 2$. В противном случае рассмотрим новое отображение $f'(\lambda, \kappa) = (2 \wedge \lambda', \kappa')$, которое на M имеет те же неподвижные точки, что и исходное. Далее определим $g(\lambda, \kappa) = (2\lambda - \lambda', \kappa')$. При $(\lambda, \kappa) \in F_t$ имеем $\lambda = 1$, $1 \leq \lambda' \leq 2$ и, значит, $0 \leq 2\lambda - \lambda' \leq 1$, откуда $g(F_t) \subset M$ $\forall t$. В силу доказанного пункта (i) $g(\cdot)$ имеет в M неподвижную точку, т. е. существует $(\bar{\lambda}, \bar{\kappa}) = (2\bar{\lambda} - \lambda', \kappa')$. Отсюда, записывая равенство по-компонетно, $\bar{\kappa} = \kappa'$ и $\bar{\lambda} = 2\bar{\lambda} - \lambda' \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda'$, что означает, что $(\bar{\lambda}, \bar{\kappa})$ — неподвижная точка f. Теорема доказана. ■

Замечание 5 Обратите внимание, что мы применяем параметризацию $A(M)$ используя (λ, κ) только с целью указать способ преобразования функции f такой, который не меняет её неподвижных точек. Новая функция, определённая таким образом, непрерывная и отображает M в себя. ■

Замечание 6 Анализ доказательства показывает, что утверждение теоремы **??** можно обобщить на случай декартова произведения отображений, первое из которых удовлетворяет условию теоремы **??**, а второе — условиям теоремы Брауэра или приводимое к ней — например, выполнены условия (i) или (ii). ■

Итак, теперь мы можем сформулировать основной результат. В интересующем нас случае

$$\mathcal{M} : \Delta_{\varepsilon}^{(n-1)} \times Y \to \Delta^{(n-1)}.$$

Если в качестве центральной точки $d \in M = \Delta_{\varepsilon}^{(n-1)}$ принять центр симплекса $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = d$, то в силу расширительного свойства (ii) отображения $\mathcal{M}$ будет выполнено условие (ii) теоремы **??**. Далее, если

$$\mathcal{F} : \Delta_{\varepsilon}^{(n-1)} \times Y \to Y$$

любое непрерывное отображение, то отображение $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$ будет иметь неподвижную точку на $X = \Delta_{\varepsilon}^{(n-1)} \times Y$. В результате доказана следующая

Теорема 6 *Пусть $\mathcal{A}$ компактное подмножество конечномерного линейного пространства и μ мера на $\mathcal{A}$. Если выполнены предположения* $(\mathbf{P})$, $(\mathbf{C})$, *то область $\mathcal{A}$ можно разделить на любое заданное число иммиграционно состоятельных юрисдикций. Это деление также можно осуществить так, чтобы выполнялись заданные непрерывные непротиворечивые требования.*

Отображение $\mathcal{F}$, встроенное в конструкцию поиска неподвижной точки, выражает какие-то дополнительные требования, предъявляемые к межстрановому делению. Например, таким способом можно накладывать какие-нибудь требования на центры (столицы) стран. В частности, можно потребовать, чтобы столицы располагались в одном из центров тяжести стран и т. д. Далее мы исследуем эту тему подробнее.

[7]Здесь $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

3.1 Деление на страны со столицами в центре масс и евклидовой метрикой

В основополагающих работах ???, посвящённых анализу равновесия Тибу, особое внимание уделяется случаю межстранового деления с функциями индивидуальных затрат $c_i(\cdot)$, определённых в (**??**), — они зависят от массы резидентов юрисдикции $\mu(S_i)$, расположения её центра $r_c(S_i)$, и места жительства данного индивида — задано координатами $x \in \mathcal{A}$ и еклидовым расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$ до центра страны: является

$$c_i(x, \mu(S_i), r_c(S_i)) = \frac{g_i}{\mu(S_i)} + \rho(x, r_c(S_i)), \quad g_i > 0, \quad i \in N.$$

Для многомерной фигуры центр масс (барицентр) i-й страны в нашем контексте определятся как

$$r_c(S_i) = \frac{1}{\mu(S_i)} \int_{S_i} x d\mu(x), \quad x \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^l.$$

Так будет, если в основу концепции положить распределение популяции. Однако, если мы хотим, чтобы в качестве центра понимался центр территории без учёта населения, тогда мы приходим к понятию

$$r_c(S_i) = \frac{1}{m(S_i)} \int_{S_i} x dx, \quad m(S_i) = \int_{S_i} dx.$$

Здесь $m(S_i)$ это мера Лебега множества S_i.

Теперь включить требование о том, что столицы должны быть в каком-нибудь барицентре просто, нужно положить

$$\mathcal{F}(\delta_1, \ldots, \delta_n, y_1, \ldots, y_n) = (r_c(S_1(\delta, y)), \ldots, r_c(S_n(\delta, y))) \in Y^n.$$

Конечно, далее надо позаботится о том, чтобы точечно-множественные отображения были непрерывны в каком-нибудь смысле (не обязательно по Хаусдорфу, но можно и так) с тем, чтобы обеспечить непрерывность $r_c(S_i(\delta, y))$. Кроме того, надо аккуратно продумать случай потенциально возможного совпадения столиц на уровне области определения $\mathcal{F}$.

Есть ещё одна проблема, которую я пока плохо понимаю. Действительно, можно уже при двух странах предложить пример, где барицентр окажется за пределами территории страны. Однако в норме центр страны должен находится во внутренней точке (для гиперболических границ, например). Означает ли это, что просто эта ситуация не является решением и найдется неподвижная точка, где все OK?

Список литературы

Alesina, A. and E. Spolaore (1997). On the number and size of nations// *Quarterly Journal of Economics* 113, 1027–1056.

Le Breton, M., Musatov, M., Savvateev, A. and S. Weber (2010). Rethinking Alesina and Spolaore's "uni-dimensional world": existence of migration proof country structures for arbitrary distributed populations// *in*: Proceedings of XI International Academic Conference on Economic and Social Development. Moscow, 6 – 8 April 2010: University — Higher School of Economics

Маракулин В. М. (2014). Существование иммиграционно состоятельного деления на страны// *Новосибирск*, — 12 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 292)

Savvateev, A., Sorokin, C. and S. Weber (2015). Theory of spatial general equilibrium// *Manuscript*

Krasnosel'skii, M. A. (1960). Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators, *Soviet Mathematics. Doklady*, vol. 1, 1285–1288

Kwong, M. K. (2008). On Krasnoselskii's cone fixed point theorem, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, Volume 2008, Article ID 164537, 18 pages, doi:10.1155/2008/164537