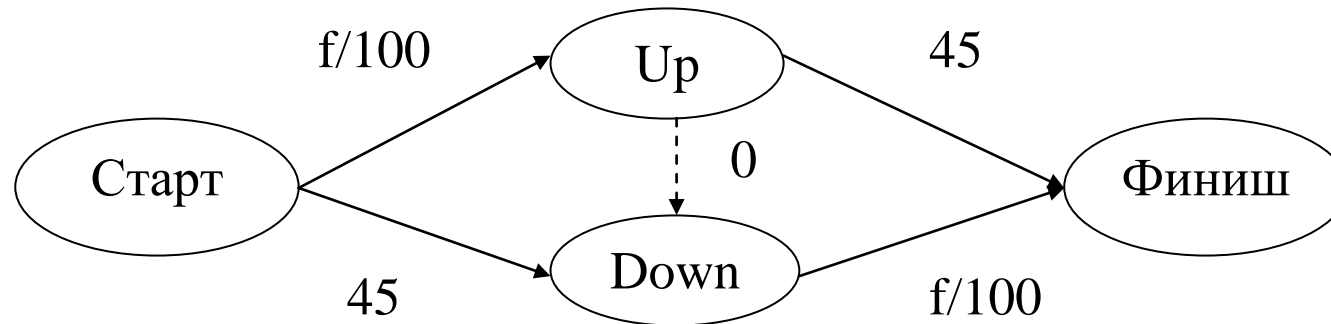


Об эффективной вычислимости конкурентных равновесий в транспортно-экономических моделях

Гасников Александр Владимирович (МФТИ)

ЦЭМИ РАН; 15 ноября 2016

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)



Корреспонденция: $d = 4000$ авт/час, $x_{up} + x_{down} = d$.

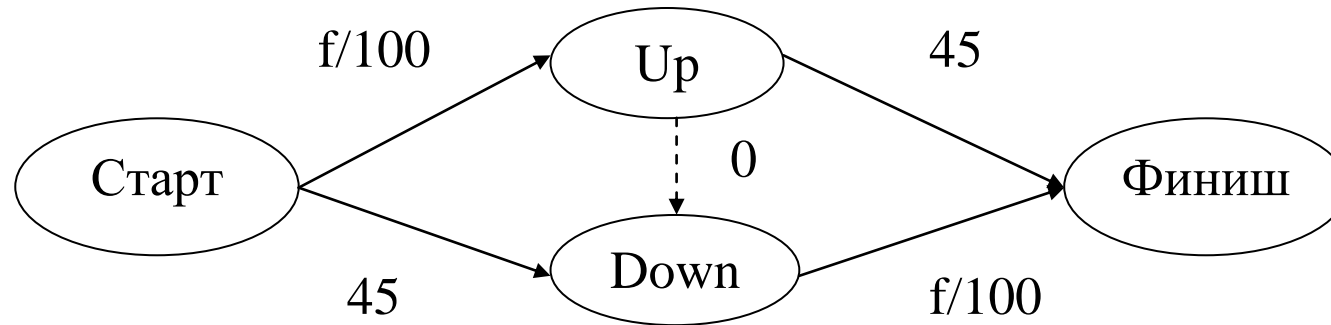
Равновесие: $x_{up} = 2000$ авт/час, $x_{down} = 2000$ авт/час,

$$\tilde{T}_{up}(x) = \tilde{T}_{down}(x) = 65 \text{ мин.}$$

Равновесие (если есть ребро Up->Down): $x_{up,down} = 4000$ авт/час,

$$\tilde{T}_{up,down}(x) = 80 \text{ мин.}$$

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)

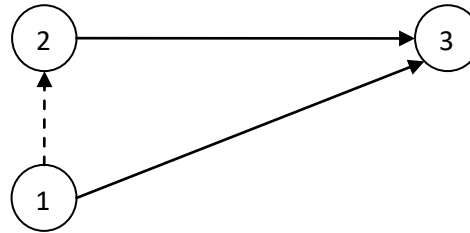


$$\Psi(x) = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) \rightarrow \min_{f = \Theta x, x \in X}, \sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz. \quad (1)$$

Платные дороги: $\bar{\tau}(f) = \tau(f) + \underbrace{f \tau'(f)}_{\text{штраф}}$. (VCG – механизм);

$$x_{up} = x_{down} = 1750 \text{ авт / час}, x_{up,down} = 500 \text{ авт / час}.$$

Парадокс Браеса (модель Стабильной Динамики)



Корреспонденции: $d_{13} = d_{23} = 1500$ авт/час, $d_{12} = 0$;

$$\tau_e^\mu(f_e) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0^+} \begin{cases} \bar{t}_e, & 0 \leq f_e < \bar{f}_e \\ [\bar{t}_e, \infty), & f_e = \bar{f}_e \end{cases}, \text{ BPR: } \tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \eta \cdot (f_e / \bar{f}_e)^{\frac{1}{\mu}} \right),$$

$(\bar{f}_{12} = \bar{f}_{13}) = \bar{f}_{23} = 2000$ авт/час, $\bar{t}_{13} = 1$ час, $\bar{t}_{23} = 30$ мин, $\bar{t}_{12} = 15$ мин.

Равновесие (без 1-2): $x_{13} = x_{23} = 1500$ авт/час, $T_{13} = 1$ час, $T_{23} = 30$ мин.

Равновесие (с 1-2): $x_{13} = 1000$ авт/час, $x_{123} = 500$ авт/час,
 $x_{23} = 1500$ авт/час, $T_{13} = 1$ час, $T_{23} = 45$ мин.

Если в (1) перейти к пределу $\mu \rightarrow 0^+$, то: $\sum_{e \in E} f_e \bar{t}_e \rightarrow \min_{f = \Theta x, f \leq \bar{f}, x \in X}$.

Обобщение

Обозначим множество пар $w = (i, j)$ источник-сток OD , x_p – поток по пути p ; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w , $P = \bigcup_{w \in OD} P_w$ – множество всех путей; $f_e(x) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p$ – поток на ребре e (здесь и далее $x = \{x_p\}$, $f = \Theta x$), где $\delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}$; $\tau_e(f_e)$ – затраты на ребре e ($\tau_e'(f_e) \geq 0$); $T_p(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(f_e(x)) \delta_{ep}$ – затраты на пути p ;

$X = \left\{ x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in OD \right\}$ – множество допустимых распределений потоков по путям, где d_w – корреспонденция, отвечающая паре w .

Определение 1. Распределение потоков по путям $x = \{x_p\} \in X$ называется равновесием (Нэша–Вардрона) в популяционной игре $\langle \{x_p\} \in X, \{\tilde{T}_p(x)\} \rangle$, если из $x_p > 0$ ($p \in P_w$) следует $\tilde{T}_p(x) = \min_{q \in P_w} \tilde{T}_q(x)$.

Или, что то же самое:

$$\text{для любых } w \in OD, p \in P_w \text{ выполняется } x_p \cdot \left(\tilde{T}_p(x) - \min_{q \in P_w} \tilde{T}_q(x) \right) = 0.$$

Теорема 1. Популяционная игра $\langle \{x_p\} \in X, \{\tilde{T}_p(x)\} \rangle$ является потенциалной. Равновесие x^* в этой игре всегда существует, и находится из решения задачи выпуклой оптимизации ($\tilde{T}(x) = \nabla \Psi(f(x))$)

$$x^* \in \text{Arg min}_{x \in X} \Psi(f(x)) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e(x)} \tau_e(z) dz = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e(x)). \quad (1)$$

Для дальнейшего будет важно переписать задачу $\min_{x \in X} \Psi(f(x))$ через двойственную:

$$\begin{aligned}
\min_{x \in X} \Psi(f(x)) &= \min_{f, x} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) : f = \Theta x, x \in X \right\} = \\
&= \min_{f, x} \left\{ \sum_{e \in E} \max_{t_e \in \text{dom } \sigma_e^*} [f_e t_e - \sigma_e^*(t_e)] : f = \Theta x, x \in X \right\} = \\
&= \max_{t \in \text{dom } \sigma^*} \left\{ \min_{f, x} \left[\sum_{e \in E} f_e t_e : f = \Theta x, x \in X \right] - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\} = \\
&= \max_{t \geq \bar{t}} \left\{ \sum_{w \in OD} d_w T_w(t) - \langle \bar{f}, t - \bar{t} \rangle - \mu \sum_{e \in E} h(t_e - \bar{t}_e, \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu) \right\}, \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\sigma_e^*(t_e)$ – сопряженная функция к $\sigma_e(f_e)$, $T_w(t) = \min_{p \in P_w} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e$ – длина кратчайшего пути из i в j ($w = (i, j)$) на графе, взвешенном согласно вектору t , $h(t_e - \bar{t}_e, \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu)$ – сильно выпуклая функция по первому аргументу. При этом $\tau_e^\mu(f_e(x(\mu))) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0+} t_e$, где $x(\mu)$ – равновесное распределение потоков, рассчитывающееся по формуле (1), а $t = \{t_e\}$ – решение задачи (2), при естественных условиях единственное. Описанный предельный переход позволяет переходить к задачам, в которых вместо функции затрат на ребрах $\tau_e(f_e)$ заданы ограничения на пропускные способности $0 \leq f_e \leq \bar{f}_e$ и затраты \bar{t}_e на прохождения ребер, когда на ребрах нет “пробок” ($f_e < \bar{f}_e$).

Основным для дальнейшего выводом из этого всего является способ (основанный на применении теоремы Демьянова–Данскина, как правило, в градиентном варианте в виду единственности t) потенциального описания набора $T(d) := \{T_w(t(d))\}$:

$$\begin{aligned}
 T(d) &= \partial_d \underbrace{\min_{x \in X(d)} \Psi(f(x))}_{\Phi(d)} = \\
 &= \partial_d \max_{t \geq \bar{t}} \underbrace{\left\{ \sum_{w \in OD} d_w T_w(t) - \langle \bar{f}, t - \bar{t} \rangle - \mu \sum_{e \in E} h(t_e - \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu) \right\}}_{\Phi(d)}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Выше матрица корреспонденций $\{d_w\}_{w \in OD}$ была задана по постановке задачи. Сейчас мы откажемся от этого условия, вводя в источники O производство, а в стоки D – потребление. Агенты “появляются” в тех пунктах производства, произведя товар в которых его можно с выгодой для себя реализовать в каком-нибудь из пунктов потребления. Это означает, что затраты на производство и затраты на транспортировку полностью окупаются последующей выручкой от реализации продукции в пункте потребления. Агенты, которых мы здесь считаем маленькими, будут “приходить” в систему до тех пор, пока существует цепочка (пункт производства–маршрут–пункт потребления), обеспечивающая им положительную прибыль. Важно отметить, что по ходу “наплыва” агентов транспортная сеть становится все более и более загруженной, что может сказываться на затратах на перевозку. В результате прибыль ранее пришедших агентов падает, что

побуждает их перераспределяться, т.е. искать более выгодные цепочки. Возникает ряд вопросов. Например, сходится ли такая динамика (точнее семейство динамик, отражающих рациональность агентов) к равновесию? Если сходится, то единственно ли равновесие? Если равновесие единственно, то как его можно эффективно найти (описать)? Попытка ответить на эти вопросы (но, прежде всего, на последний вопрос) для достаточно широкого и важного в приложениях класса задач предпринята далее.

Рассмотрим сначала для большей наглядности отдельно потенциальный случай. А именно тот случай, когда в источнике $i \in O$ производственная функция имеет вид $\sigma_i(f_i)$, где $f_i = \sum_{k:(i,k) \in E} f_e = \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij}$, аналогично для стоков $j \in D$ определим функции полезности со зна-

ком минус $\sigma_j(f_j)$, $f_j = \sum_{k:(k,j)=e \in E} f_e = \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij}$. Все эти функции считаем

выпуклыми. Мы обозначаем эти функции одинаковыми буквами, однако, это не должно вызвать в дальнейшем путаницы в виду характерных нижних индексов. Редуцируем рассматриваемую задачу к рассмотренной ранее задаче. Рассмотрим новый граф с множеством вершин $O \cup D$, соединенных теми же ребрами, что и в изначальном графе, и с одним дополнительным фиктивным источником и одним дополнительным фиктивным стоком. Этот фиктивный источник соединим со всеми источниками O , аналогично фиктивный сток соединим со всеми стоками D . Если существует путь из источника i в сток j в исходном графе, то в новом графе прочертим соответствующее ребро с функцией затрат $T_{ij}(d)$. Проведем дополнительное (фиктивное) ребро, соединяющее фиктивный источник с фиктивным стоком, затраты

на прохождения которого тождественный ноль. Получим в итоге ориентированный граф путей из источника в сток. Легко понять, что мы оказываемся “почти” в условиях предыдущего пункта (причем с более частным графом – с одним источником и стоком) с точностью до обозначений:

$$\{x_p\} \rightarrow \{d_{ij}\}, \{\tau_e(f_e)\} \rightarrow \{\sigma'_i(f_i), T_{ij}(d), \sigma'_j(f_j)\}.$$

“Почти”, потому что, во-первых, затраты $T_{ij}(d)$ зависят от всего набора $\{d_{ij}\}$, а не только от d_{ij} , а во-вторых, не ясно что в данном случае играет роль матрицы корреспонденций (в нашем случае это матрица 1×1 , т.е. просто число). Начнем с ответа на второй вопрос. Мы считаем, что в источниках имеется потенциальная возможность производить неограниченное количество продукта, просто в какой-то момент,

перестает быть выгодным что-то производить и перевозить. Для этого, собственно, и было введено нулевое ребро, поток по которому обозначим d_0 . То есть, другими словами, мы должны считать, что

$\sum_{(i,j) \in W} d_{ij} + d_0 = \bar{d}$. Если \bar{d} – достаточно большое, то равновесная конфигурация не зависит от того, чему именно равно \bar{d} , поскольку не требуется определять d_0 . С первой проблемой можно разобраться, немного обобщив теорему 1. Предположим, что (см. формулу (3))

гуграция не зависит от того, чему именно равно \bar{d} , поскольку не требуется определять d_0 . С первой проблемой можно разобраться, немного обобщив теорему 1. Предположим, что (см. формулу (3))

$$\exists \Phi(d) \text{ - выпуклая : } T(d) = \nabla \Phi(d). \quad (4)$$

Тогда имеет место

Теорема 2. *Популяционная игра*

$$\left\langle \left\{ d_{ij}, d_0 \geq 0 \right\}, \left\{ G_{ij}(d) = \sigma'_i(f_i) + T_{ij}(d) + \sigma'_j(f_j), G_0(d) \equiv 0 \right\} \right\rangle,$$

является потенциальной. Равновесие d^ в этой игре всегда существует (если $\sigma(\cdot)$ – сильно выпуклые функции, то равновесие гарантировано единственно), и находится из решения задачи выпуклой оптимизации*

$$d^* \in \arg \min_{d \geq 0} \tilde{\Psi}(d),$$

$$\tilde{\Psi}(d = \{d_{ij}\}) = \sum_{i \in O} \sigma_i \left(\sum_{j: (i,j) \in OD} d_{ij} \right) + \sum_{j \in D} \sigma_j \left(\sum_{i: (i,j) \in OD} d_{ij} \right) + \Phi(d). \quad (5)$$

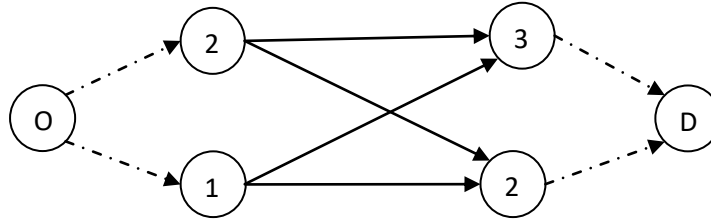
Именно такая конструкция и была рассмотрена в работе А.А. Шаннин и др., 2014 (для многопродуктового рынка грузоперевозок РЖД). Если искать стохастическое равновесие, то функционал в теореме 2 необходимо энтропийно регуляризовать. Такие конструкции рассматривались (в нерегуляризованном случае), например, Гасников–Нестеров, 2014. Уже в этой работе можно углядеть необходимость искусственного введения потенциалов (двойственных множителей) в сами функции σ . А именно, предполагается, что все эти функции σ – линейные с неизвестными наклонами. Тем не менее, считается, что при этом известно, чему должны равняться в равновесии следующие суммы:

$$\sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} = L_i, \quad \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} = W_j \quad \left(\sum_{i \in O} L_i = \sum_{j \in D} W_j = N \right). \quad (6)$$

То есть имеются скрытые от нас (модельера) потенциалы (параметры) $\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\}$, которые могут быть рассчитаны исходя из дополнительной информации. Применительно к модели расчета матрицы корреспонденций выписанные дополнительные условия (6) однозначно определяют все неизвестные потенциалы. Однако при этом вместо задачи выпуклой оптимизации мы получаем минимаксную (седловую) задачу выпуклую по $\{d_{ij}\} \geq 0$ и вогнутую, точнее даже линейную, по потенциалам $\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\}$:

$$\min_{\substack{\{d_{ij}\} \geq 0 \\ \sum_{(i,j) \in W} d_{ij} = N}} \max_{\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\}} \left[\sum_{i \in O} \lambda_i^L \cdot \left(\sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} - L_i \right) + \sum_{j \in D} \lambda_j^W \cdot \left(W_j - \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right) + \Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln(d_{ij}/N) \right]. \quad (7)$$

Энтропийная модель расчета матрицы корреспонденций



$$\sum_{i=1, j=1}^{n, n} T_{ij} d_{ij} + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^L \sum_{j=1}^n d_{ij} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_j^W \sum_{i=1}^n d_{ij} \right) + \gamma \sum_{i, j=1}^n d_{ij} \ln d_{ij} \rightarrow \min_{\sum_{i, j=1}^n d_{ij} = N, \{d_{ij}\} \geq 0},$$

$\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\}$ – потенциалы “притяжения” районов (Канторович–Гавурин).

К сожалению, они не известны. Зато известны такие $\{L_i, W_j\}$, что

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} = L_i, \quad \sum_{i=1}^n d_{ij} = W_j \quad (N = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{j=1}^n W_j). \quad (\text{A})$$

$$\boxed{\sum_{i=1, j=1}^{n, n} T_{ij} d_{ij} + \gamma \sum_{i, j=1}^n d_{ij} \ln d_{ij} \rightarrow \min_{d \in (A), \{d_{ij}\} \geq 0} .}$$

Проблема (возникающая при попытке построить многостадийную модель): $d(T)$ возникает в модели расчета матрицы корреспонденций, а $T\left(\left\{\tau_e\left(f_e(d)\right)\right\}\right)$, где $f_e(d)$ рассчитывается согласно модели Бэкмана или модели Стабильной Динамики. **Получается порочный круг!**

На практике проблему решали с помощью метода простых итераций (искали неподвижную точку). Однако не было установлено, что такая процедура сходится и, тем более, не было оценок скорости сходимости. **В диссертации предложен новый способ записи этой задачи!**

Ключевое наблюдение:

$$T\left(\left\{\tau_e\left(f_e(d)\right)\right\}\right) = \partial_d \left(\min_{f=\Theta x, x \in X(d)} \Psi(f(x)) \right) (\nabla_x \Psi(f(x)) = \tilde{T}(x), T_{ij} = \min_{p \in P_{ij}} \tilde{T}_p).$$

$$\Psi(f(x)) + \gamma \sum_{i,j=1}^n d_{ij} \ln d_{ij} \rightarrow \min_{d \in (A), \{d_{ij}\} \geq 0; f = \Theta x, x \in X(d)}.$$

Сетевая модель алгоритмического рыночного поведения

Предположим теперь, что имеется m видов товаров и, дополнительно, имеется q типов материалов (количества которых можно использовать в единицу времени ограничены вектором b), использующихся в производстве. В источниках располагаются производители товаров, а в стоках потребители. Мы считаем, что любой производитель товара, одновременно, является и потребителем, т.е. $O \subseteq D$. Обозначим через y – вектор цен (руб.) на материалы; λ_i^L – вектор цен (руб.), по которым производитель продает товары перевозчику в пункте производства i , λ_j^W – вектор цен (руб.), по которым потребитель покупает товары у перевозчика в пункте потребления j . Опишем каждого экономического агента:

***i*-й Производитель**

$U_i \subset \mathbb{R}_+^m$ – максимальное технологическое множество (замкнутое, выпуклое);

$\alpha_i \in [0,1]$ – уровень участия;

$\chi_i(\alpha_i U_i) = \alpha_i \chi_i(U_i)$ – постоянные технологические производственные затраты (руб.) при уровне участия α_i (в единицу времени);

$L_i \in \alpha_i U_i$, $[L_i]_k$ – количество произведенного k -го продукта (в единицу времени);

A_i , $[A_i]_{kl}$ – количество затраченного l -го продукта при производстве единицы k -го продукта;

$c_i, [c_i]_k$ – затраты (руб.) на производство единицы k -го продукта;

$R_i, [R_i]_{kl}$ – количество затраченного k -го материала для приготовления единицы l -го продукта.

Описанный “Производитель” решает задачу:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{L_i \in \alpha_i U_i \\ \alpha_i \in [0,1]}} \left\{ \langle \lambda_i^L, L_i \rangle - \chi_i(\alpha_i U_i) - \langle \lambda_i^W, A_i L_i \rangle - \langle c_i, L_i \rangle - \langle y, R_i L_i \rangle \right\} = \\ = \max_{L_i \in U_i} \left\{ \left(\langle \lambda_i^L - c^i - A_i^T \lambda_i^W - R_i^T y, L_i \rangle - \chi_i(U_i) \right)_+ \right\}. \end{aligned}$$

j-й Потребитель

Предположим, что каждый продукт имеет s различных свойств (своеобразных полезностей). Это может быть, например, содержание витаминов, белков, жиров, углеводов.

$Q_j, [Q_j]_{kl}$ – вклад единицы l -го продукта в удовлетворение k -го свойства;

$\sigma_j, [\sigma_j]_k$ – минимально допустимый уровень удовлетворения k -го свойства (в единицу времени);

$\beta_j \in [0,1]$ – уровень участия;

$V_j = \{W_j \in \mathbb{R}_+^m : Q_j W_j \geq \sigma_j\}$ – допустимое множество при полном участии;

$W_j \in \beta_j V_j$, $[W_j]_k$ – количество потребленного k -го продукта (в единицу времени);

τ_j – постоянный доход (руб.) при полном участии (в единицу времени).

Описанный “Потребитель” решает задачу:

$$\max_{\substack{W_j \in \beta_j V_j \\ \beta_j \in [0,1]}} \left\{ \beta_j \tau_j - \langle \lambda_j^W, W_j \rangle \right\} = \max_{W_j \in V_j} \left\{ \left(\tau_j - \langle \lambda_j^W, W_j \rangle \right)_+ \right\}.$$

Перевозчик

Этот агент решает задачу типа (5), (7):

$$\min_{\{d_{ij}\} \geq 0} \left[\sum_{i \in O} \left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle - \sum_{j \in D} \left\langle \lambda_j^W, \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle + \Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \ln \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \right],$$

в которой корреспонденции формируются “Производителями” и “Потребителями”. Мы считаем, что все товары одинаковы с точки зрения

“Перевозчика”, т.е. $\Phi(d) := \Phi \left(\left\{ \sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right\} \right)$ (можно рассматривать и

другие варианты). Здесь и далее нам будет удобно писать энтропий-

ную регуляризацию в виде $\gamma \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \ln \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right)$, т.е. опус-

кать $N = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k$. Точнее полагать $N=1$ с той же потоковой (физической) размерностью, что и d , чтобы под логарифмом была безразмерная величина. При естественных балансовых условиях $\sum_{i \in O} L_i = \sum_{i \in O} A_i L_i + \sum_{i \in D} W_j$ это никак не повлияет на решение задачи.

Проблема здесь в том, что все эти три типа задач завязаны друг на друга посредством векторов цен. Выпишем, как это принято при поиске конкурентных равновесий, все имеющиеся **законы Вальраса** (балансовые ограничения + условия дополняющей нежесткости), которые накладывают совершенно естественные ограничения на эти векторы цен:

$$\sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} \leq L_i, \left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} - L_i \right\rangle = 0, \lambda_i^L \geq 0;$$

$$\sum_{k:(k,i) \in OD} d_{ki} \geq W_i + A_i L_i, \left\langle \lambda_i^W, W_i + A_i L_i - \sum_{k:(k,i) \in OD} d_{ki} \right\rangle = 0, \lambda_i^W \geq 0, i \in O;$$

$$\sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \geq W_j, \left\langle \lambda_j^W, W_j - \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle = 0, \lambda_j^W \geq 0, j \in D \setminus O;$$

$$\sum_{i \in O} R_i L_i \leq b, \left\langle y, b - \sum_{i \in O} R_i L_i \right\rangle = 0, y \geq 0.$$

Определение 2. Набор $\langle \{d_{ij}\}, \{L_i\}, \{W_j\}; y, \{\lambda_i^L\}, \{\lambda_j^W\} \rangle$ называется конкурентным равновесием (Вальраса–Нестерова–Шихмана) если он доставляет решения задачам всех агентов и удовлетворяет законам Вальраса.

Для того чтобы установить корректность этого определения, подобно, введем **условие продуктивности**:

существуют такие $\bar{L}_i \in U_i$, $\bar{W}_j \in V_j$, что

$$\sum_{i \in O} \bar{L}_i > \sum_{i \in O} A_i \bar{L}_i + \sum_{i \in D} \bar{W}_j \text{ и } \sum_{i \in O} R_i \bar{L}_i < b.$$

Теорема 3. В условиях продуктивности конкурентное равновесие существует и находится из решения правильной выпукло-вогнутой седловой задачи:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\{d_{ij}\} \geq 0 \\ y \geq 0}} \max_{\substack{\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\} \geq 0 \\ \{L_i \in \alpha_i U_i, \alpha_i \in [0,1]\} \\ \{W_j \in \beta_j V_j, \beta_j \in [0,1]\}}} \min_{\substack{\{L_i \in \alpha_i U_i, \alpha_i \in [0,1]\} \\ \{W_j \in \beta_j V_j, \beta_j \in [0,1]\}}} \left[\right. \\
 & \left. \left[\sum_{i \in O} \left(\left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} - L_i \right\rangle + \left\langle \lambda_i^W, \sum_{k:(k,i) \in OD} A_k L_i \right\rangle + \chi_i(\alpha_i U_i) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{j \in D} \left(\left\langle \lambda_j^W, W_j - \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle - \beta_j \tau_j \right) + \left\langle y, b - \sum_{i \in O} R_i L_i \right\rangle + \right. \right. \\
 & \left. \left. \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \ln \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \Bigg] = \\
& = \max_{\substack{\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\} \geq 0 \\ y \geq 0}} \left[\langle y, b \rangle - \sum_{i \in O} \max_{L_i \in U_i} \left\{ \left(\langle \lambda_i^L - c^i - A_i^T \lambda_i^W - R_i^T y, L_i \rangle - \chi_i(U_i) \right)_+ \right\} - \right. \\
& - \sum_{j \in D} \max_{W_j \in V_j} \left\{ \left(\tau_j - \langle \lambda_j^W, W_j \rangle \right)_+ \right\} + \min_{\{d_{ij}\} \geq 0} \left\{ \sum_{i \in O} \left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle - \sum_{j \in D} \left\langle \lambda_j^W, \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle + \right. \\
& \left. \left. + \Phi(d) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \ln \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \right\} \right]. \tag{8}
\end{aligned}$$

Для того чтобы объединить все модели в одну модель рассмотрим формулы (3), (4), (7), (8). Легко понять, что формула (3) как раз и задает тот самый потенциал, существование которого (формула (4)) требуется для справедливости теоремы 2 (неявно это предполагается и в теореме 3), фактически, сводящей поиск конкурентного равновесия к задаче (7), а в общем случае (8).

Определение 3. Набор $\langle \{x_p\}, \{d_{ij}\}, \{L_i\}, \{W_j\}; y, \{\lambda_i^L\}, \{\lambda_j^W\} \rangle$ называется полным (общим) конкурентным равновесием (Вальраса–Нэша–Вардрона–Нестерова–Шихмана) если $\langle \{d_{ij}\}, \{L_i\}, \{W_j\}; y, \{\lambda_i^L\}, \{\lambda_j^W\} \rangle$ – конкурентное равновесие, а $\{x_p\}$ является равновесием (Нэша–Вардрона) при заданном конкурентным равновесием наборе $\{d_{ij}\}$.

Теорема 4. В условиях продуктивности полное конкурентное равновесие существует и находится из решения правильной выпукловогнутой седловой задачи:

$$\begin{aligned}
& \max_{\substack{\{\lambda_i^L, \lambda_j^W\} \geq 0 \\ y \geq 0}} \left[\langle y, b \rangle - \sum_{i \in O} \max_{L_i \in U_i} \left\{ \left(\langle \lambda_i^L - c^i - A_i^T \lambda_i^W - R_i^T y, L_i \rangle - \chi_i(U_i) \right)_+ \right\} - \right. \\
& - \sum_{j \in D} \max_{W_j \in V_j} \left\{ \left(\tau_j - \langle \lambda_j^W, W_j \rangle \right)_+ \right\} + \min_{\{d_{ij}\} \geq 0} \left\{ \sum_{i \in O} \left\langle \lambda_i^L, \sum_{j:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle - \sum_{j \in D} \left\langle \lambda_j^W, \sum_{i:(i,j) \in OD} d_{ij} \right\rangle + \right. \\
& + \max_{t \geq \bar{t}} \left\{ \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) T_{ij}(t) - \langle \bar{f}, t - \bar{t} \rangle - \mu \sum_{e \in E} h(t_e - \bar{t}_e, \bar{f}_e, \mu) \right\} + \\
& \left. + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \ln \left(\sum_{k=1}^m [d_{ij}]_k \right) \right\} \left. \right]. \tag{10}
\end{aligned}$$

Спасибо за внимание!