



Цепные равновесия в безопасных стратегиях

М.Б.Искаков

Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН

А.Б.Искаков

Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН

Цель работы: представление модификации концепции РБС с неоднородным отношением игроков к безопасности; простейший случай – все игроки строго упорядочены по своему отношению к безопасности.

План выступления:

1. Введение: исходные понятия - РБС.
2. Цепное равновесие в безопасных стратегиях.
3. Цепные РБС в играх двух участников.
4. Игры с более чем двумя участниками.
5. Продуктовое соревнование на отрезке.
6. Цепное и сложное РБС.
7. Заключение.

Равновесие в безопасных стратегиях: однородное отношение игроков к безопасности.

Цепное равновесие в безопасных стратегиях: все игроки строго упорядочены по своему отношению к безопасности.

Сложное равновесие в безопасных стратегиях: произвольное упорядочивание игроков по отношению к безопасности.

Множество РБС \subset Множество цепных РБС \subset Множество сложных РБС

Определение 1. *Угрозой* игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s'_i , что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s'_i, s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2. Стратегия s_i игрока i называется *безопасной стратегией*, при *заданной обстановке* s_{-i} , если ни один игрок не имеет в профиле s угроз против игрока i . Профиль стратегий x называется *безопасным профилем*, если все его стратегии безопасны.

Определение 3. *Безопасным отклонением* игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s'_i такое, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s'_i, s'_j, x_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s'_j игрока j против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}) .

Определение 4. Профиль стратегий называется *равновесием в безопасных стратегиях*, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.

Определение 1. *Угрозой* игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s'_i , что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s'_i, s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2'. Стратегия s_i игрока i называется *безопасной стратегией* по отношению к игрокам $j > i$, при заданной обстановке s_{-i} , если ни один игрок $j > i$ не имеет в профиле s угроз против игрока i .

Определение 3'. *Безопасным отклонением* по отношению к игрокам $j > i$ игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s'_i такое, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s'_i, s'_j, x_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s'_j игрока $j > i$ против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}) .

Определение 4'. Профиль стратегий называется *цепным равновесием в безопасных стратегиях*, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной по отношению к игрокам $j > i$, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением по отношению к игрокам $j > i$.

c_1	b_1	b_2
a_1	$(0,0,0)$	$(-1,1,0)$
a_2	$(-1,0,0)$	$(0,-1,0)$

c_2	b_1	b_2
a_1	$(-1,0,1)$	$(-1,1,-1)$
a_2	$(0,0,-1)$	$(0,-1,-2)$

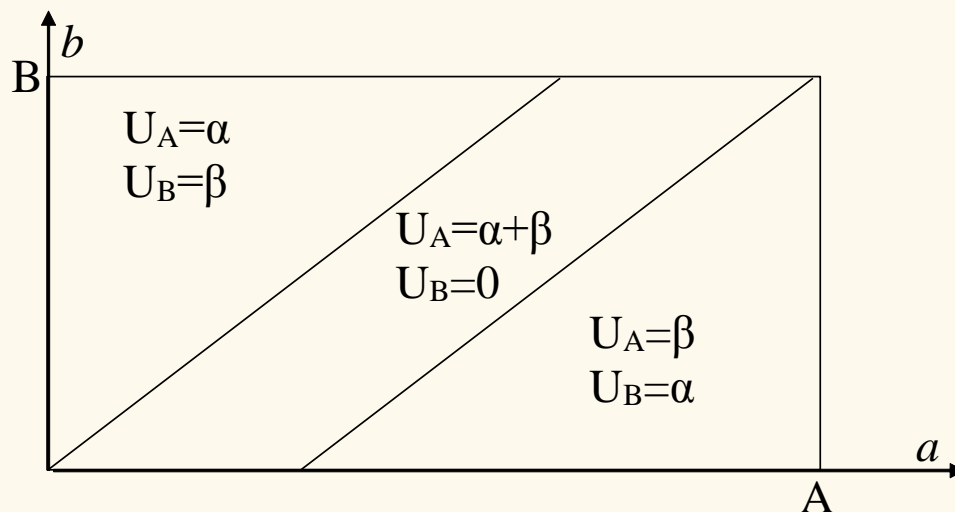
Единственное цепное
РБС: (a_1, b_1, c_1)
С порядком игроков:
 $(\{C\}, \{B\}, \{A\})$

Определение 1. *Угрозой* игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s'_i , что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s'_i, s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2'. Стратегия s_i игрока i называется *безопасной стратегией* по отношению к игрокам $j > i$, при заданной обстановке s_{-i} , если ни один игрок $j > i$ не имеет в профиле s угроз против игрока i .

Определение 3''. Строгим безопасным отклонением по отношению к игрокам $j > i$ игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s'_i такое, что $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s'_i, s'_j, x_{-ij}) > u_i(s)$ для любой угрозы s'_j игрока $j > i$ против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}) .

Определение 4''. Профиль стратегий называется слабым цепным равновесием в *безопасных стратегиях*, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной по отношению к игрокам $j > i$, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш строгим безопасным отклонением по отношению к игрокам $j > i$.



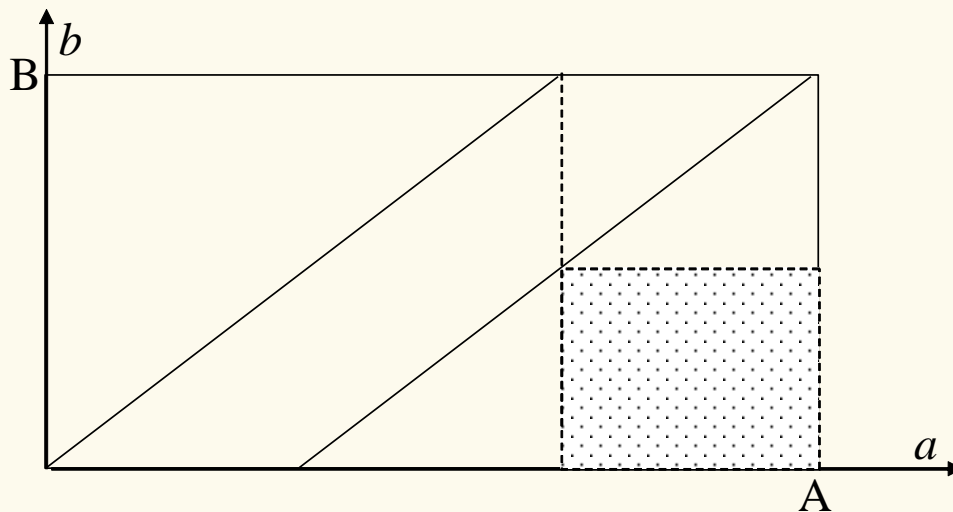
Выигрыши игроков в пространстве игровых профилей (a, b)

Стратегии игроков: (a, b) , $a < A$, $b < B$. Пусть $A > B$, $\alpha > \beta$, $A < 2B$.

Целевые функции игроков:

$$U_A = \begin{cases} \beta, & a < b \\ \beta + \alpha/2, & a = b \\ \beta + \alpha, & b < a < b + (A - B) \\ \beta/2 + \alpha, & a = b + (A - B) \\ \alpha, & a > b + (A - B) \end{cases}$$

$$U_B = \alpha + \beta - U_A$$



Множество цепных РБС в пространстве игровых профилей (a, b)

Множество цепных РБС: $\{(a, b) \mid a > B, b < 2B - A\}$

Определение 5. Для матричной игры или игры с непрерывными компактными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрыша $G = \{(S_1, u_1), (S_2, u_2)\}$ **точкой Штакельберга для игрока** $i = \{1, 2\}$ называется профиль s^* в котором $u_i(s^*) = \max_{s_i, s_{-i} \in BR_{-i}(s_i)} u_i(s_i, s_{-i}), i \in \{1, 2\}$, где $BR_{-i}(s_i)$ обозначает соответствие наилучших ответов игрока $(-i)$ в игре G .

Утверждение 1. Точки Штакельберга в игре двух участников G являются слабыми цепными РБС.

Следствие 1. В любой матричной игре или непрерывной игре двух участников с компактными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрыша существует слабое цепное РБС.

	t_1	t_2	t_3
s_1	(0,0)	(1,3)	(4,2)
s_2	(3,3)	(2,0)	(-1,0)

Единственная точка
Штакельберга: (s_2, t_1)

Цепные РБС:
 $\{(s_2, t_1), (s_1, t_3)\}$

Определение 6. *Игра двух участников G является односторонне соревновательной, если в ней игрок может увеличить свой выигрыш односторонним отклонением тогда и только тогда, когда он при этом уменьшает выигрыш соперника.*

Утверждение 2. *Для любой матричной или непрерывной игры G двух участников с компактными пространствами стратегий и непрерывными функциями выигрышей, если игра G – односторонне соревновательная, то в ней множества слабых цепных РБС и точек Штакельберга совпадают.*

Определение 7. Условной точкой Штакельберга для игроков i и j при фиксированных стратегиях s_{-ij} других игроков назовем такую пару их стратегий (s_i^*, s_j^*) , что $s_j^* = BR_j(s_i^* | s_{-ij})$, $u_i(s_i^*, s_j^*) = \max_{s_i, s_j \in BR_j(s_i | s_{-ij})} u_i(s_i, s_j, s_{-ij})$, где $BR_j(s_i | s_{-ij})$ обозначает соответствие наилучших ответов игрока j на стратегию s_i игрока i при условии, что стратегии s_{-ij} других игроков фиксированы.

Утверждение 3. Если игроков в игре G можно так перенумеровать, что любая пара стратегий (s_i^*, s_j^*) в игровом профиле s^* игроков с номерами $i, j : j > i$ является для них условной точкой Штакельберга при s_{-ij}^* , то s^* является слабым цепным РБС с тем же порядком игроков.

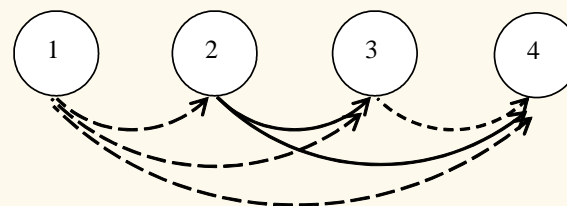
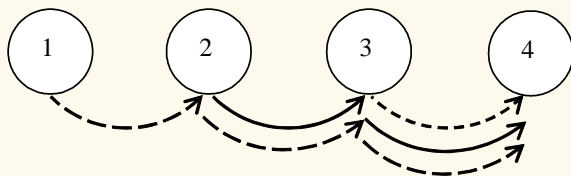
Игры > 2 участников: условные точки Штакельберга и цепные РБС, пример



Институт Проблем
Управления РАН

c_1	b_1	b_2
a_1	(0,0,0)	(1,2,2)
a_2	(2,2,1)	(2,1,2)

c_2	b_1	b_2
a_1	(2,1,2)	(2,2,1)
a_2	(1,2,2)	(0,0,0)

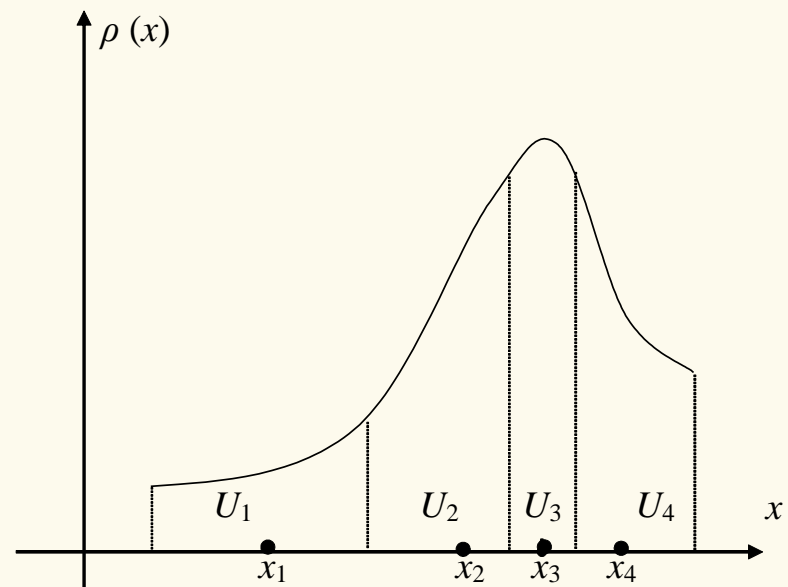


Структура предположений игроков в решении Штакельберга (слева) и в цепных РБС (справа)

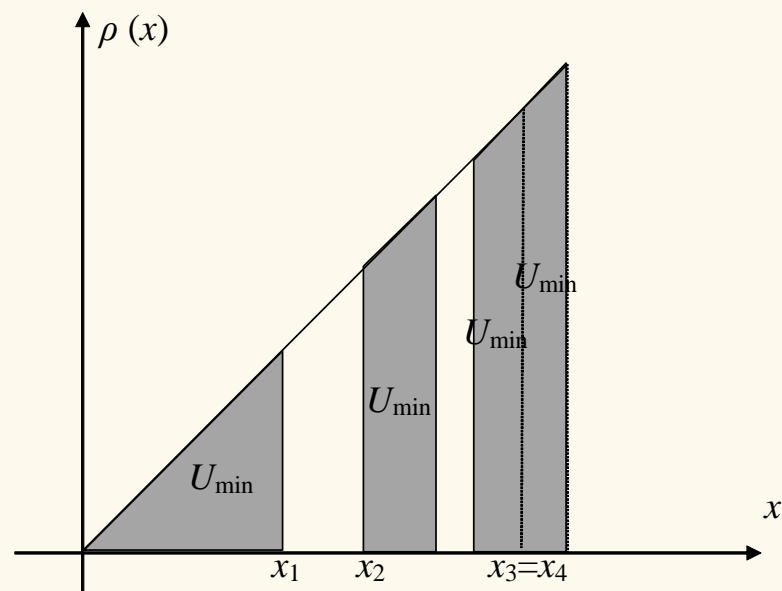
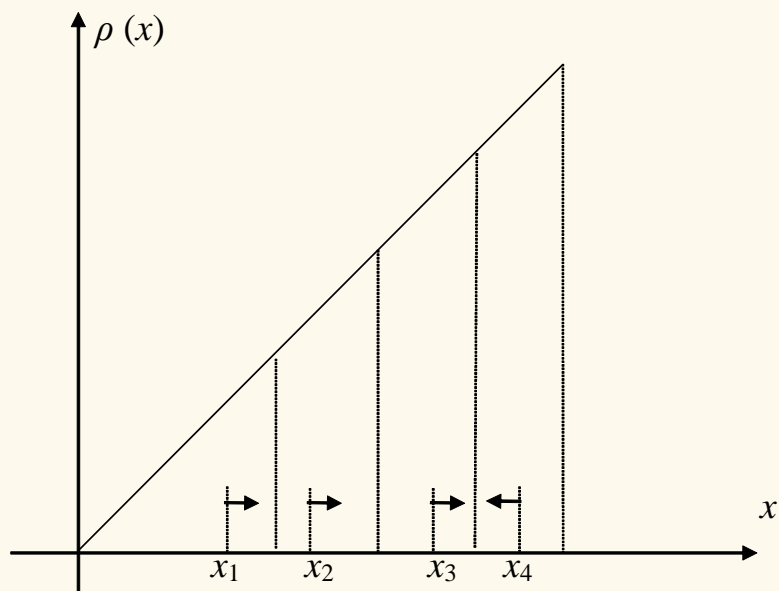
На отрезке $[0, 1]$ задана ограниченная непрерывная положительная функция $\rho(x)$. Для игроков $i \in N = \{1, \dots, n\}$ заданы их действия $x_i \in [0, 1]$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Пусть $B_i(x) = \{x \in [0,1] \mid \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\|, \forall j \neq i\}$ – область рынка, принадлежащая фирме i .
Функция выигрыша фирмы i :

$$U_i(x_i, x_{-i}) = \frac{1}{1+n} \int_{B_i(x)} \rho(x) dx,$$

где n число других фирм (кроме фирмы i), выбравших расположение x_i .



Пример дележа ресурса

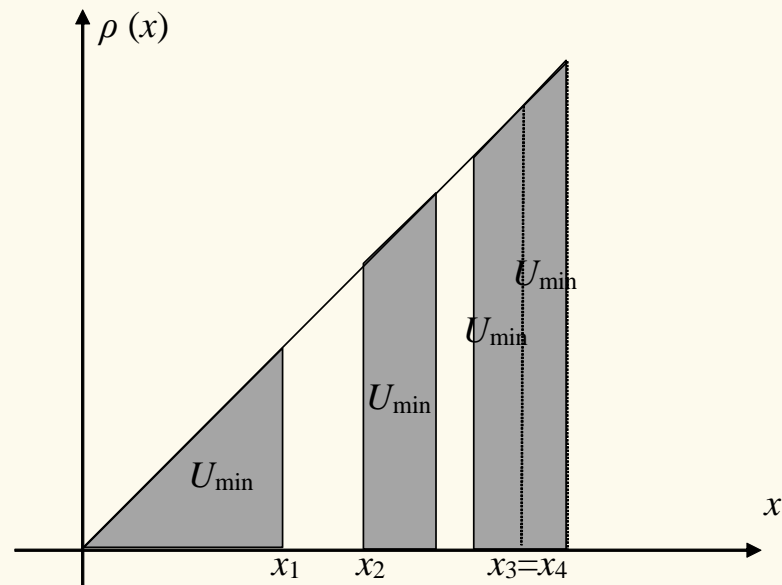
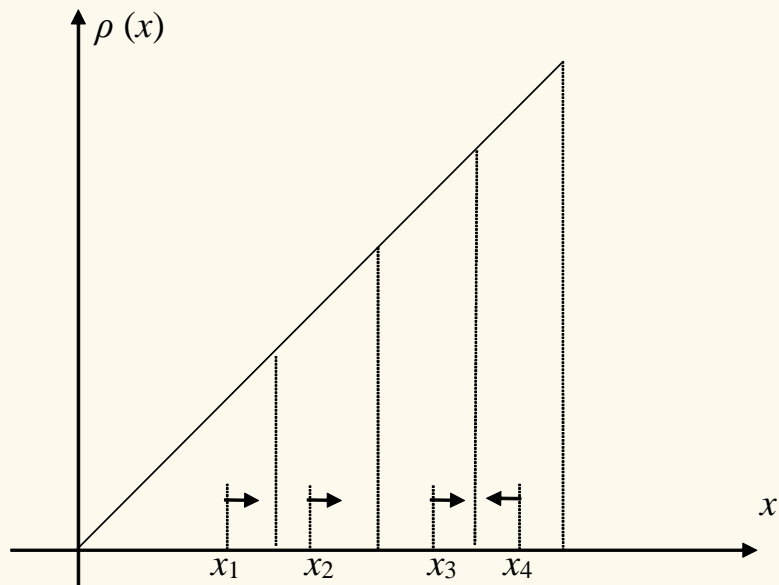


Положения 4-х фирм в цепном РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением $\rho(x)=x$ предпочтений потребителя

Утверждение 4. *В продуктивном соревновании $N > 2$ фирм на отрезке $[0,1]$ с линейным распределением предпочтений потребителей $\rho(x) = x, x \in [0,1]$ существует единственное (с точностью до перестановки игроков) цепное РБС, определяемое уравнениями:*

$$x_i^2 - \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)^2 = 2U_{\min}, i = 2, \dots, N-1,$$

$$x_1^2 = 1 - x_N^2 = 2U_{\min}, x_N = x_{N-1}.$$



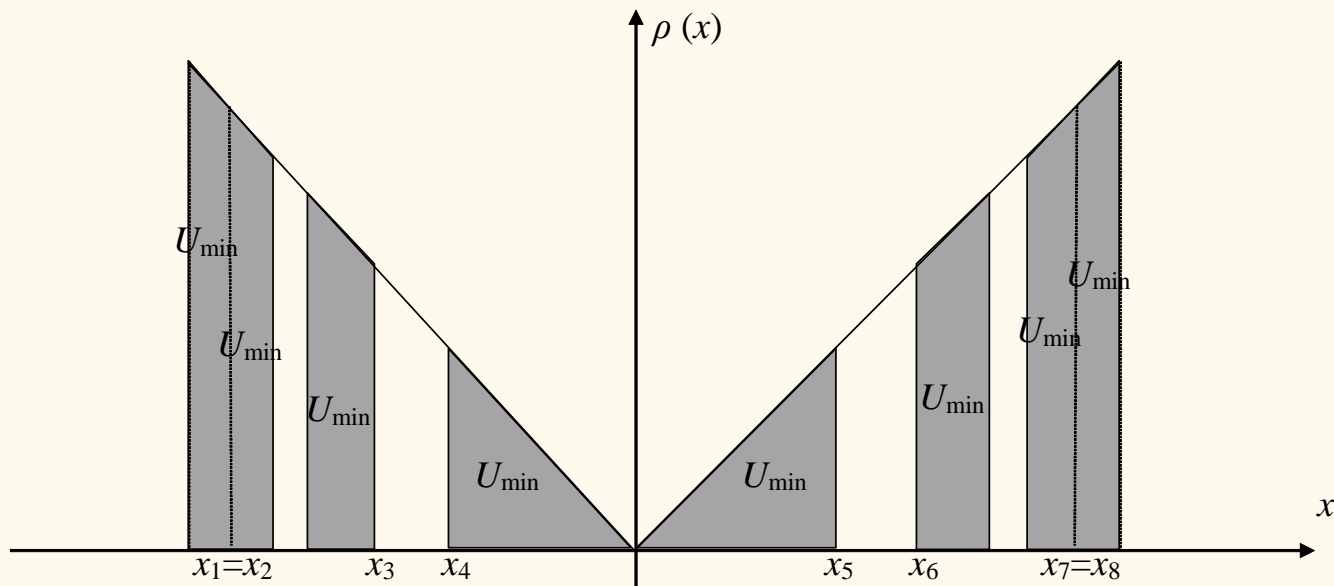
Положения 4-х фирм в цепном РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением $\rho(x)=x$ предпочтений потребителя

Решение для случая 4-х фирм:

$$x_1 = \sqrt{2U_{\min}}, \quad x_2 = \frac{5}{3}\sqrt{2U_{\min}}, \quad x_3 = x_4 = \sqrt{1 - 2U_{\min}},$$

где величина $2U_{\min} \approx 0.17677$ находится из условия:

$$\frac{3}{5}\sqrt{2U_{\min}} + \sqrt{1 - 2U_{\min}} = 2\sqrt{1 - 4U_{\min}}.$$



Структура предположений игроков в сложном РБС для примера

- **Основные результаты:**
- 1. Исследовано обобщение понятия РБС – цепное РБС
- 2. Исследована связь предложенных понятий с концепцией точек Штакельберга.
- 3. Исследование задач, не имеющих решений в более узких концепциях равновесия: игры полковника Блотто, продуктового соревнования на отрезке.