Цепные равновесия в безопасных стратегиях

М.Б.Искаков
Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН
А.Б.Искаков
Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН

Цель работы: представление модификации концепции РБС с неоднородным отношением игроков к безопасности; простейший случай – все игроки строго упорядочены по своему отношению к безопасности.

План выступления:

1. Введение: исходные понятия - РБС.
2. Цепное равновесие в безопасных стратегиях.
3. Цепные РБС в играх двух участников.
4. Игры с более чем двумя участниками.
5. Продуктовое соревнование на отрезке.
6. Цепное и сложное РБС.
7. Заключение.

РБС, цепные РБС, сложные РБС

Равновесие в безопасных стратегиях: однородное отношение игроков к безопасности.

Цепное равновесие в безопасных стратегиях: все игроки строго упорядочены по своему отношению к безопасности.

Сложное равновесие в безопасных стратегиях: произвольное упорядочивание игроков по отношению к безопасности.

Множество РБС $\subset$ Множество цепных РБС $\subset$ Множество сложных РБС

Определение 1. ***Угрозой*** игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2. Стратегия s_i игрока i называется ***безопасной стратегией, при заданной обстановке*** s_{-i}, если ни один игрок не имеет в профиле s угроз против игрока i. Профиль стратегий x называется ***безопасным профилем***, если все его стратегии безопасны.

Определение 3. ***Безопасным отклонением*** игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s_i' такое, что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s_i', s_j', x_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s_j' игрока j против игрока i в профиле (s_i', s_{-i}).

Определение 4. Профиль стратегий называется ***равновесием в безопасных стратегиях***, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.

Определение 1. ***Угрозой*** игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2'. Стратегия s_i игрока i называется ***безопасной стратегией*** **по отношению к игрокам *j*>*i*, *при заданной обстановке*** s_{-i}, если ни один игрок ***j*>*i*** не имеет в профиле s угроз против игрока i.

Определение 3'. ***Безопасным отклонением*** **по отношению к игрокам *j*>*i*** игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s_i' такое, что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s_i', s_j', x_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s_j' игрока ***j*>*i*** против игрока i в профиле (s_i', s_{-i}).

Определение 4'. Профиль стратегий называется **цепным *равновесием в безопасных стратегиях***, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной **по отношению к игрокам *j*>*i***, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением **по отношению к игрокам *j*>*i***.

Матричный пример

Институт Проблем Управления РАН

c_1	b_1	b_2
a_1	(0,0,0)	(-1,1,0)
a_2	(-1,0,0)	(0,-1,0)

c_2	b_1	b_2
a_1	(-1,0,1)	(-1,1,-1)
a_2	(0,0,-1)	(0,-1,-2)

Единственное цепное РБС: (a1,b1,c1)
С порядком игроков: ({C},{B},{A})

Слабое цепное равновесие в безопасных стратегиях

Институт Проблем Управления РАН

Определение 1. ***Угрозой*** игрока i игроку j в профиле s называется такое отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) < u_j(s)$.

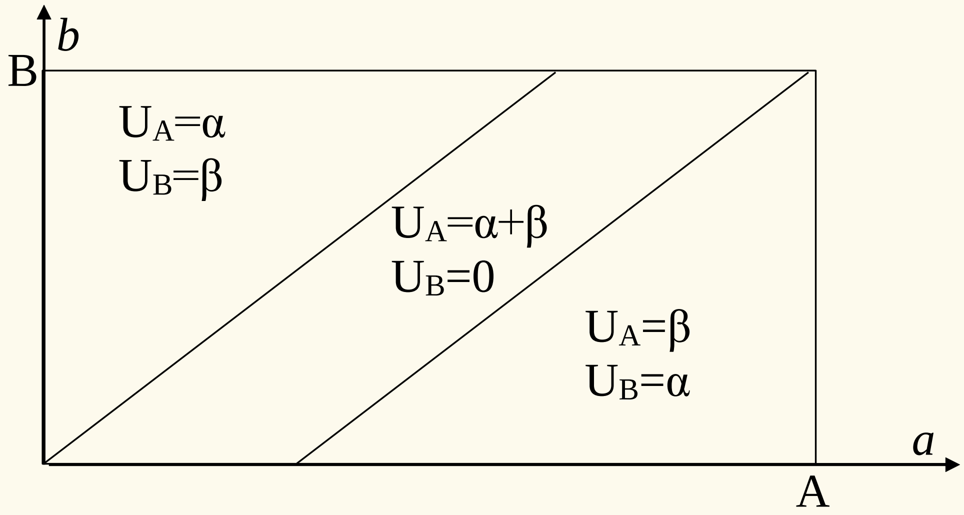
Определение 2'. Стратегия s_i игрока i называется ***безопасной стратегией*** **по отношению к игрокам *j>i*, *при заданной обстановке*** s_{-i}, если ни один игрок ***j>i*** не имеет в профиле s угроз против игрока i.

Определение 3''. **Строгим** ***безопасным отклонением по отношению к игрокам j>i*** игрока i от профиля s называется одностороннее отклонение s_i' такое, что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $\underline{u_i(s_i', s_j', x_{-ij}) > u_i(s)}$ для любой угрозы s_j' игрока $j>i$ против игрока i в профиле (s_i', s_{-i}).

Определение 4''. Профиль стратегий называется **слабым цепным** ***равновесием в безопасных стратегиях***, если (1) стратегия любого игрока этом профиле является безопасной **по отношению к игрокам *j>i***, (2) ни один игрок не может увеличить свой выигрыш строгим безопасным отклонением **по отношению к игрокам *j>i***.

Игры 2-х. Пример: игра полковника Блотто, постановка

Институт Проблем Управления РАН



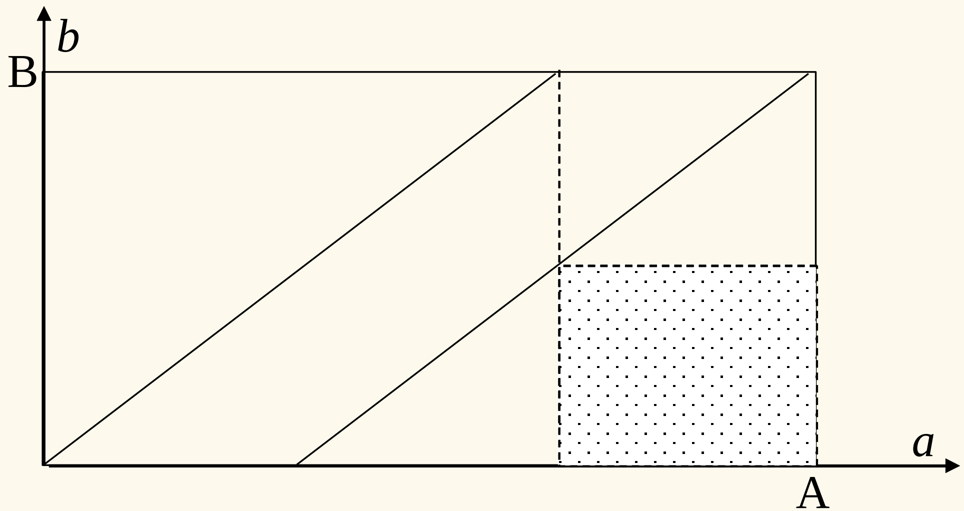
Выигрыши игроков в пространстве игровых профилей (a,b)

Стратегии игроков: (a,b), a<A, b<B. Пусть A>B, α>β, A<2B.
Целевые функции игроков:

$$U_A = \begin{cases} \beta, & a < b \\ \beta + \alpha/2, & a = b \\ \beta + \alpha, & b < a < b + (A - B) \\ \beta/2 + \alpha, & a = b + (A - B) \\ \alpha, & a > b + (A - B) \end{cases}$$

$$U_B = \alpha + \beta - U_A$$

Игры 2-х. Пример: игра полковника Блотто, цепные РБС



Множество цепных РБС в пространстве игровых профилей (a,b)

Множество цепных РБС: $\{(a,b) \mid a > B, b < 2B - A\}$

Цепные РБС и точки Штакельберга в играх 2-х

Институт Проблем Управления РАН

Определение 5. *Для матричной игры или игры с непрерывными компактными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрыша* $G=\{(S_1,u_1),(S_2,u_2)\}$ ***точкой Штакельберга для игрока*** $i=\{1,2\}$ *называется профиль* s^* *в котором* $u_i(s^*)=\max\limits_{s_i,s_{-i}\in BR_{-i}(s_i)} u_i(s_i,s_{-i}), i\in\{1,2\}$, *где* $BR_{-i}(s_i)$ *обозначает соответствие наилучших ответов игрока* $(-i)$ в игре *G*.

Утверждение 1. *Точки Штакельберга в игре двух участников G являются слабыми цепными РБС.*

Следствие 1. *В любой матричной игре или непрерывной игре двух участников с компактными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрыша существует слабое цепное РБС.*

Цепные РБС и точки Штакельберга в играх 2-х

Институт Проблем Управления РАН

	t_1	t_2	t_3
s_1	(0,0)	(1,3)	(4,2)
s_2	(3,3)	(2,0)	(-1,0)

Единственная точка Штакельберга: (s_2,t_1)

Цепные РБС: {(s2,t1),(s1,t3)}

Определение 6. *Игра двух участников G является* ***односторонне соревновательной****, если в ней игрок может увеличить свой выигрыш односторонним отклонением тогда и только тогда, когда он при этом уменьшает выигрыш соперника.*

Утверждение 2. *Для любой матричной или непрерывной игры G двух участников с компактными пространствами стратегий и непрерывными функциями выигрышей, если игра G – односторонне соревновательная, то в ней множества слабых цепных РБС и точек Штакельберга совпадают.*

Определение 7. *Условной точкой Штакельберга для игроков i и j при фиксированнных стратегиях* s_{-ij} *других игроков назовем такую пару их стратегий* (s_i^*, s_j^*), *что* $s_j^* = BR_j(s_i^* \mid s_{-ij}), u_i(s_i^*, s_j^*) = \max_{s_i, s_j \in BR_j(s_i \mid s_{-ij})} u_i(s_i, s_j, s_{-ij})$, *где* $BR_j(s_i \mid s_{-ij})$ *обозначает соответствие наилучших ответов игрока j на стратегию* s_i *игрока i при условии, что стратегии* s_{-ij} *других игроков фиксированы.*

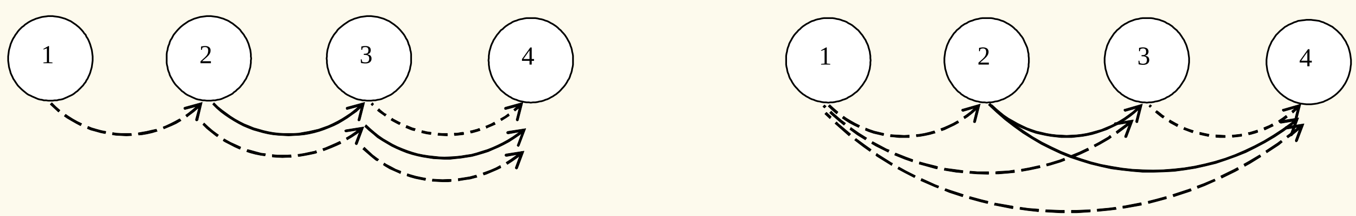
Утверждение 3. *Если игроков в игре G можно так перенумеровать, что любая пара стратегий* (s_i^*, s_j^*) *в игровом профиле* s^* *игроков с номерами i, j : j>i является для них условной точкой Штакельберга при* s^*_{-ij}, *то* s^* *являетсяявляется слабым цепным РБС с тем же порядком игроков.*

Игры > 2 участников: условные точки Штакельберга и цепные РБС, пример

Институт Проблем Управления РАН

c_1	b_1	b_2
a_1	(0,0,0)	(1,2,2)
a_2	(2,2,1)	(2,1,2)

c_2	b_1	b_2
a_1	(2,1,2)	(2,2,1)
a_2	(1,2,2)	(0,0,0)



Структура предположений игроков в решении Штакельберга (слева) и в цепных РБС (справа)

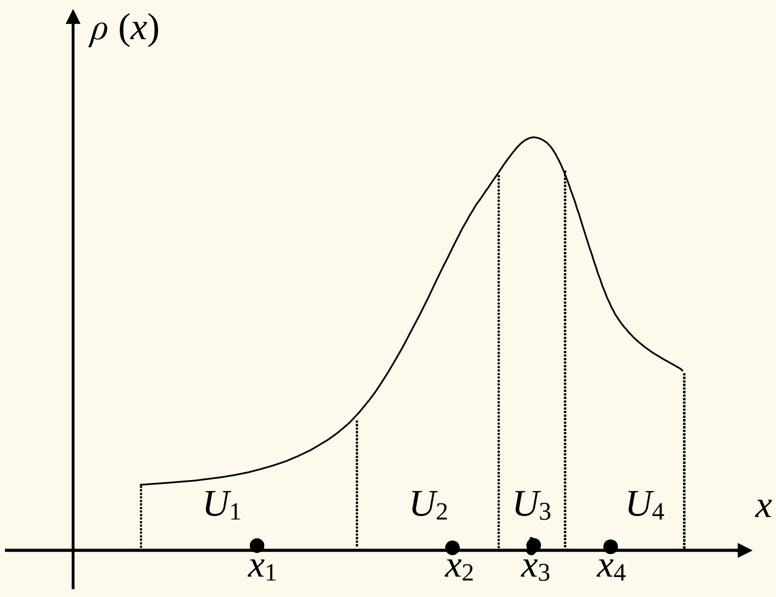
Продуктовое соревнование на отрезке: постановка

Институт Проблем Управления РАН

На отрезке [0, 1] задана ограниченная непрерывная положительная функция $\rho(x)$. Для игроков $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ заданы их действия $x_i \in [0, 1]$, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$. Пусть $B_i(x) = \{x \in [0,1] \,|\, \|x - x_i\| \le \|x - x_j\|, \forall j \ne i\}$ – область рынка, принадлежащая фирме i. Функция выигрыша фирмы i:

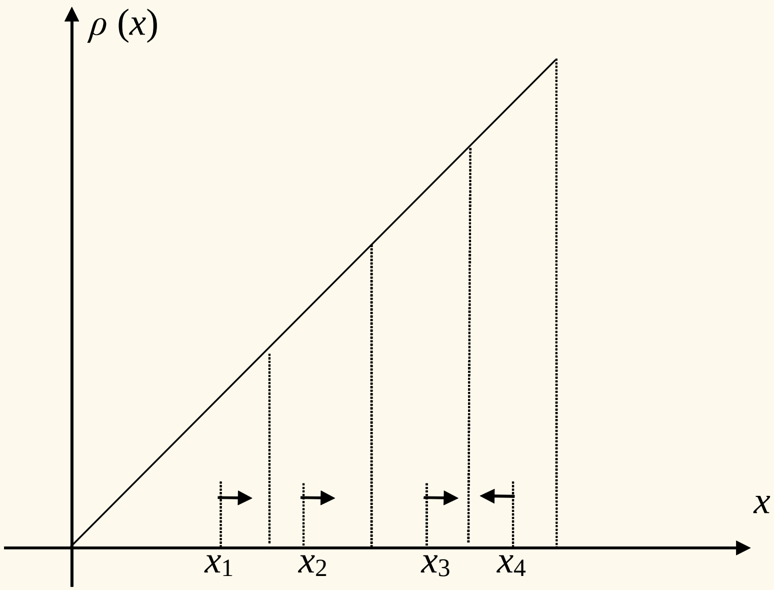
$$U_i(x_i, x_{-i}) = \frac{1}{1+n}\int_{B_i(x)} \rho(x)dx,$$

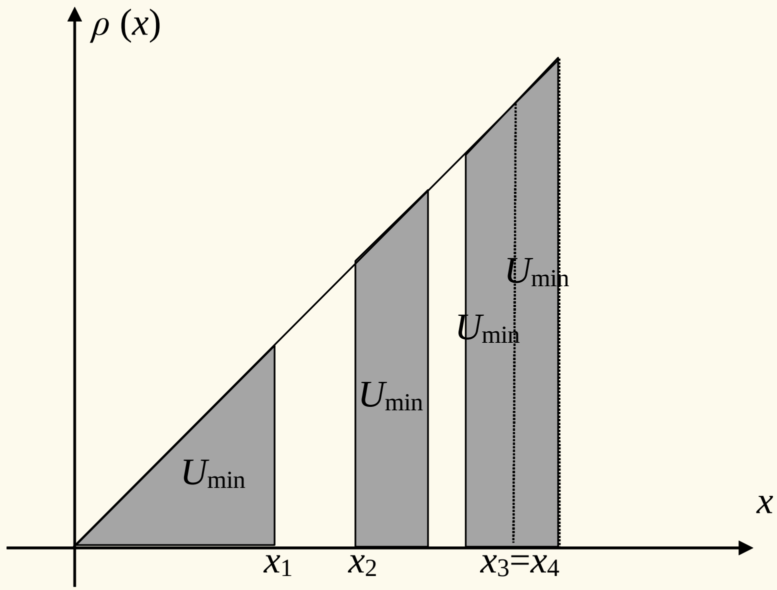
где n число других фирм (кроме фирмы i), выбравших расположение x_i.



Пример дележа ресурса

Продуктовое соревнование на отрезке: пример





Положения 4-х фирм в цепном РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением $\rho(x)=x$ предпочтений потребителя

Продуктовое соревнование на отрезке: решение

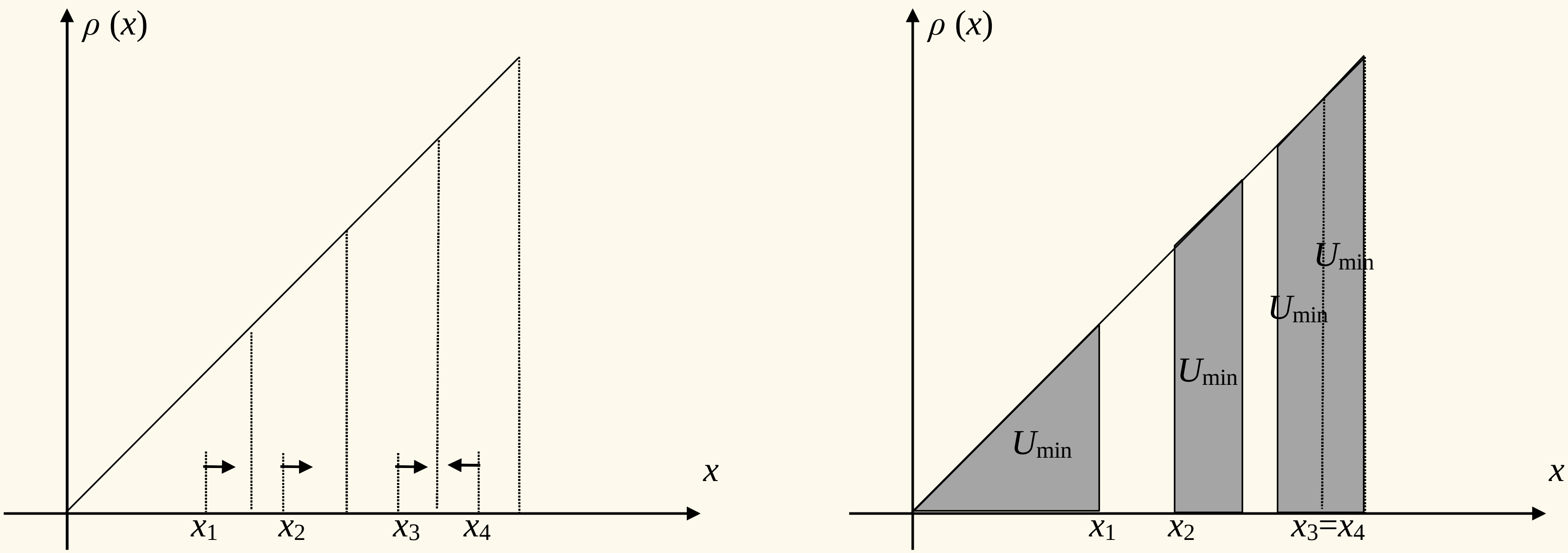
Утверждение 4. *В продуктовом соревновании* $N > 2$ *фирм на отрезке* $[0,1]$ *с линейным распределением предпочтений потребителей* $\rho(x) = x, x \in [0,1]$ *существует единственное (с точностью до перестановки игроков) цепное РБС, определяемое уравнениями:*

$$x_i^{\,2} - \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 = 2U_{\min}, i = 2,\dots, N-1,$$

$$x_1^{\,2} = 1 - x_N^{\,2} = 2U_{\min}, x_N = x_{N-1}.$$

Продуктовое соревнование на отрезке: решение примера

Институт Проблем Управления РАН



Положения 4-х фирм в цепном РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением $\rho(x)=x$ предпочтений потребителя

Решение для случая 4-х фирм:

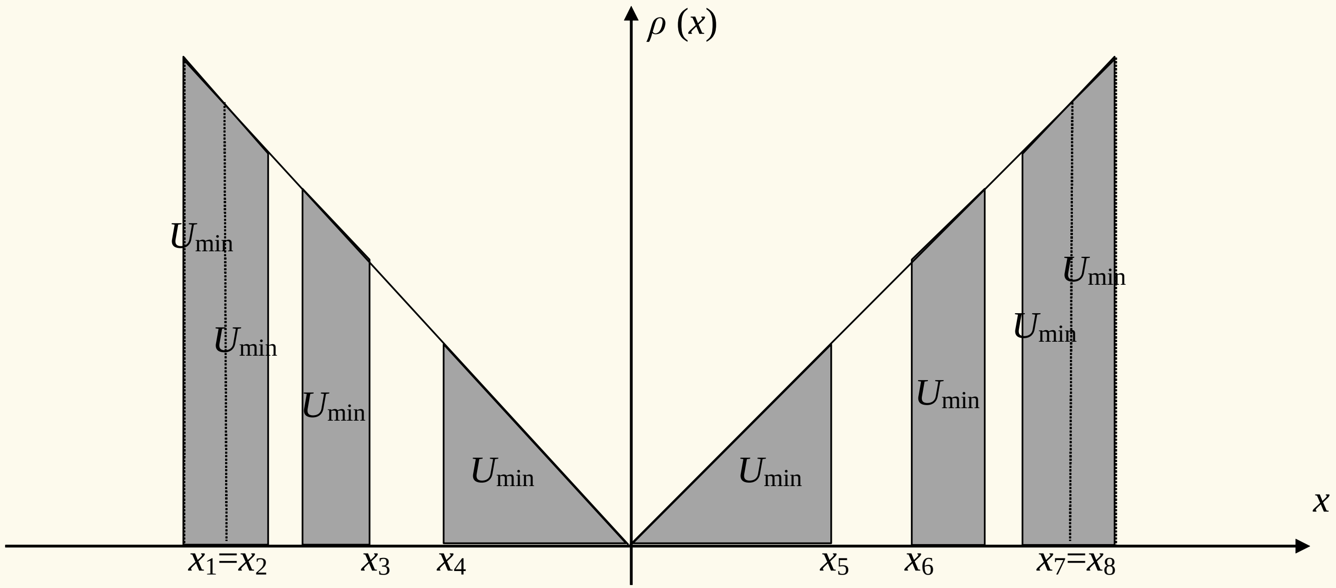
$$x_1 = \sqrt{2U_{\min}}, \quad x_2 = \frac{5}{3}\sqrt{2U_{\min}}, \quad x_3 = x_4 = \sqrt{1-2U_{\min}},$$

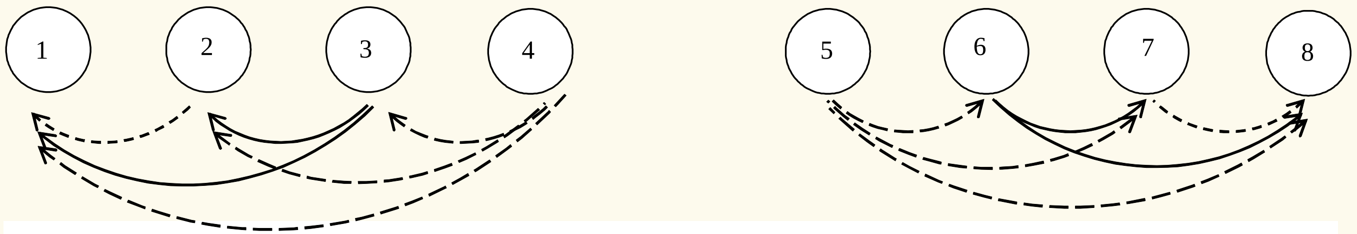
где величина $2U_{\min} \approx 0.17677$ находится из условия:

$$\frac{3}{5}\sqrt{2U_{\min}} + \sqrt{1-2U_{\min}} = 2\sqrt{1-4U_{\min}}.$$

Цепное и сложное РБС: пример

Институт Проблем Управления РАН





Структура предположений игроков в сложном РБС для примера

Заключение

- **Основные результаты:**
- 1.Исследовано обобщение понятия РБС – цепное РБС
- 2. Исследована связь предложенных понятий с концепцией точек Штакельберга.
- 3. Исследование задач, не имеющих решений в более узких концепциях равновесия: игры полковника Блотто, продуктового соревнования на отрезке.