Манипулирование при неполной информации

Юлия Веселова

Международная научно-учебная лаборатория анализа и выбора решений, НИУ ВШЭ; Институт проблем управления РАН

Семинар "‘Математическая экономика"’, ЦЭМИ РАН, 28 февраля 2017

Введение

- Правила коллективного выбора подвержены манипулированию со стороны избирателей: избиратели, действуя стратегически, могут добиться более выгодного для них результата голосования, намеренно исказив свои предпочтения.
- Теорема, доказанная в (Gibbard, 1973) и (Satterthwaite, 1975), утверждает, что любая недиктаторская процедура, в которой участвуют хотя бы три кандидата, является манипулируемой.
- Сравнение правил по степени манипулируемости: вычисление вероятности манипулирования (Kelly, 1993), (Aleskerov, Kurbanov, 1999), (Aleskerov et al. 2011).
- Случай с неполной информацией: модель, предложенная в (Reijngoud, Endriss, 2012).

Модель: термины и обозначения

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ - множество избирателей.
- X - множество альтернатив, $|X| = m$. $L(X)$ - множество всех линейных порядков на X. $W(X)$ - множество всех слабых порядков на X.
- $P_i \in L(X)$ - предпочтения избирателя i на X .
- Если aP_ib, то альтернатива a более предпочтительна, чем альтернатива b для избирателя i.
- Профиль предпочтений - вектор $\vec{P} = (P_1, P_2, ..., P_n)$. Анонимный профиль предпочтений $\vec{p} = (n_1, n_2, ..., n_{m!})$.
- Вектор распределения позиций для a – $v(a, \vec{P}) = (v_1(a), ..., v_m(a))$, где $v_j(a)$ – количество избирателей, у которых a на j-ом месте в предпочтениях.
- P_M – мажоритарное отношение: aP_Mb если $|\{i \in N : aP_ib\}| > |\{i \in N : bP_ia\}|$.

Модель: термины и обозначения

- Взвешенный граф мажоритарного отношения

$$WMG(\vec{P})_{kl} = |\{i \in N : a_k P_i a_l\}|$$

- Граф мажоритарного отношения

$$MG(\vec{P})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{if } a_k P a_l, \\ -1, & \text{if } a_l P a_k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $\vec{P}_{-i}$ - профиль предпочтений всех избирателей, кроме i.
- $F : L(X)^N \to W(X)$ - функция общественного благосостояния.
- $C_F : L(X)^N \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ - правило коллективного выбора.

Правила коллективного выбора

- Правила подсчета очков

$$c \in C_F(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg\max_{a \in A} \left(\left\langle s_F, v(a, \vec{P}) \right\rangle \right)$$

  - Правило относительного большинства $s_{Pl} = (1, 0, ..., 0)$,
  - Одобряющее голосование с квотой q (если $q = m - 1$, правило вето) $s_{App} = (\underbrace{1, ..., 1}_{q}, 0, ..., 0)$.
  - Правило Борда $s_B = (m - 1, m - 2, ..., 1, 0)$.
- Правило Коупленда. Выбирается альтернатива, для которой количество побед минус количество поражений по мажоритарному отношению наибольшее, т.е.

$$CS(a, \vec{P}) = |\{b \in A | aP_M b\}| - |\{b \in A | bP_M a\}|,$$

$$c \in C_{Copeland1}(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg\max_{a \in A} CS(a, \vec{P}).$$

Множественный выбор

- Правило устранения несравнимости $T : 2^X \setminus \emptyset \to X$.
- Алфавитное правило: предполагаем заданным некоторый линейный порядок на X, $aP_TbP_Tc...$, и из данного множества A выбираем недоминируемую по этому отношению альтернативу.
- Методы расширения предпочтений: Leximin и Leximax. Если предпочтения избирателя xP_iyP_iz, то расширенные предпочтения, EP_i
  - согласно Leximin: $\{x\}EP_i\{x,y\}EP_i\{y\}EP_i\{x,z\}EP_i\{x,y,z\}EP_i\{y,z\}EP_i\{z\}$.
  - согласно Leximax: $\{x\}EP_i\{x,y\}EP_i\{x,y,z\}EP_i\{x,z\}EP_i\{y\}EP_i\{y,z\}EP_i\{z\}$.

Моделирование неполной информации

- Функция публичной информации (ФПИ) (poll information function), введенная в (Reijngoud, Endriss, 2012), может быть интерпретирована как результат предварительного опроса избирателей, оглашаемый перед выборами.
  1. Профиль $\pi(\vec{P}) = \vec{P}$.
  2. Анонимный профиль: $\pi(\vec{P}) = \vec{p}(\vec{P}) = (n_1, ..., n_{m!})$.
  3. Позиции: $\pi(\vec{P}) = \vec{v}(\vec{P}) = (v(a_1), ..., v(a_m))$.
  4. Очки: $\pi(\vec{P}) = \vec{S}(\vec{P}) = (S(a_1), ..., S(a_m))$ определяется согласно правилу F.
  5. Ранжирование: $\pi(\vec{P}) = F(\vec{P})$.
  6. Победитель: $\pi(\vec{P}) = C_F(\vec{P})$.
  7. Единственный победитель: $\pi(\vec{P}) = T(C_F(\vec{P}))$
  8. Взвешенный граф мажоритарного отношения: $\pi(\vec{P}) = WMG(\vec{P})$.
  9. Граф мажоритарного отношения: $\pi(\vec{P}) = MG(\vec{P})$.

Информационное множество

- Располагая информацией о профиле $\pi(\vec{P})$ и зная свои предпочтения, избиратель i строит свое информациоуное множество

$$W_i^{\pi(\vec{P})} = \{\vec{P'_{-i}} \in L(X)^{N \setminus \{i\}} : \pi(P_i, \vec{P'_{-i}}) = \pi(\vec{P})\}$$

.

- Если $\forall \vec{P} \in L(X)^N \; \forall i \in N \; W_i^{\pi(\vec{P})} \subseteq W_i^{\pi'(\vec{P})}$, то π не менее информативна, чем π'.
- Правило C_F вычислимо из π, если существует функция $H : I \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$, т.ч. $C_F = H \circ \pi$.
- Правило C_F сильно вычислимо из π, если информации π достаточно избирателю i, чтобы вычислить результат C_F для любого предпочтения $\widetilde{P}_i \in L(X)$.

Функции публичной информации

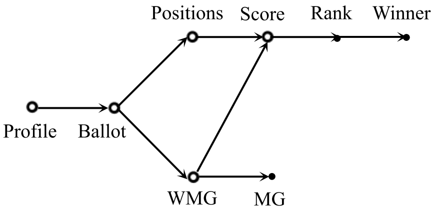

Рис.: Информативность и вычислимость ФПИ для правила Борда

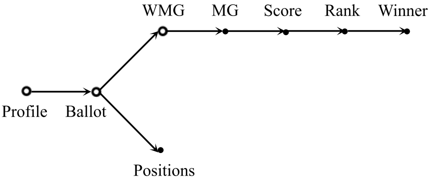

Рис.: Информативность и вычислимость ФПИ для правила Коупленда

Манипулирование при ФПИ π

- Дана функция F и профиль предпочтений $\vec{P}$. Избиратель i имеет стимул к манипулированию при ФПИ π, если $\exists \widetilde{P}_i$ т.ч.
  i) $\forall \vec{P'_{-i}} \in W_i^{\pi(\vec{P})}$ $C_F(\widetilde{P}_i, \vec{P'_{-i}})\ EP_i\ C_F(\vec{P})$ или $C_F(\widetilde{P}_i, \vec{P'_{-i}})\ EI_i\ C_F(\vec{P})$;
  ii) $\exists \vec{P'_{-i}} \in W^{\pi(\vec{P})}$, s.t. $C_F(\widetilde{P}_i, \vec{P'_{-i}})\ EP_i\ C_F(\vec{P})$.
- Функция F называется подвереженной манипулированию при ФПИ π, если $\exists \vec{P} \in L(X)^N$ и $\exists i \in N$, который имеет стимул манипулировать при ФПИ π в профиле $\vec{P}$.
- $I_1(m, n, \pi, F)$ - вероятность того, что в профиле предпочтений, случайно выбранном из $L(X)^N$, есть хотя бы один избиратель, имеющий стимул манипулировать при функции F и ФПИ π.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π, то $I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, Profile, F)$.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π, то $I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, Profile, F)$.

Теорема 2

$\lim_{n \to \infty} I_1(m, n, Winner, Plurality) = 1$ при Leximin и Leximax.
$\lim_{n \to \infty} I_1(m, n, 1Winner, Plurality) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π, то
$I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, Profile, F)$.

Теорема 2

$\lim_{n\to\infty} I_1(m, n, Winner, Plurality) = 1$ при Leximin и Leximax.
$\lim_{n\to\infty} I_1(m, n, 1Winner, Plurality) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теорема 3

При Leximin, $I_1(3, 3, MG, Borda) = 1$.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π, то $I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, Profile, F)$.

Теорема 2

$\lim_{n\to\infty} I_1(m, n, Winner, Plurality) = 1$ при Leximin и Leximax.
$\lim_{n\to\infty} I_1(m, n, 1Winner, Plurality) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теорема 3

При Leximin, $I_1(3, 3, MG, Borda) = 1$.

Теорема 4

При Leximax, $I_1(3, n, Winner, Copeland) = 0$ для нечетного числа избирателей.

Вычислительные эксперименты

Проведена серия вычислительных экспериментов в MatLab для 6 правил коллективного выбора, 8 ФПИ, для Leximin, Leximax и алфавитного правила устранения несравнимости. Число альтарнатив - 3, число избирателей - от 3 до 15.

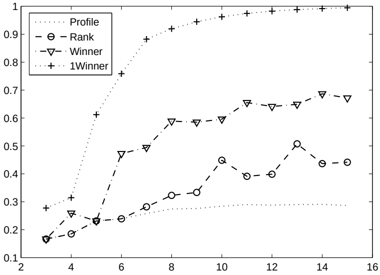

Рис.: $I_1(3, n, \pi, Plurality)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

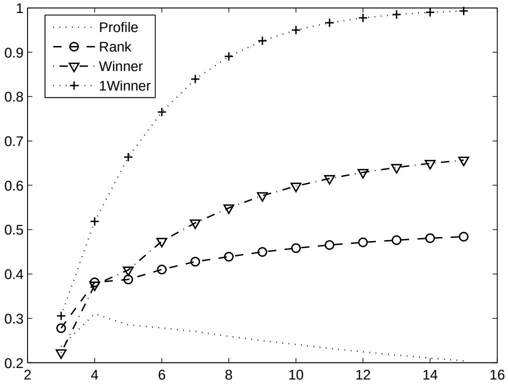

Рис.: $I_1(3, n, \pi, Borda)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

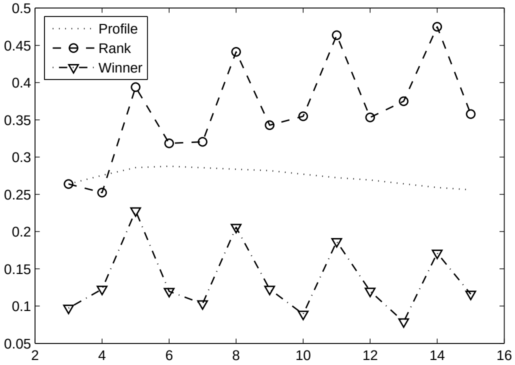

Рис.: $I_1(3, n, \pi, Veto)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

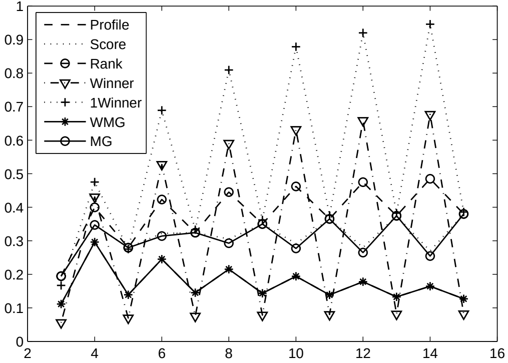

Рис.: $I_1(3, n, \pi, Copeland)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

I_1 при алфавитном правиле устранения несравнимости

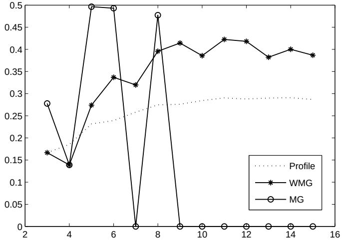

Рис.: $I_1(3, n, \pi, \mathit{Plurality})$

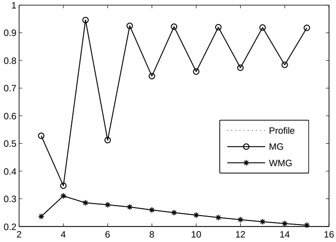

Рис.: $I_1(3, n, \pi, \mathit{Borda})$

Результаты вычислительных экспериментов

- Манипулируемость не уменьшается, когда мы рассматриваем менее информативные ФПИ.
- Для правила относительного большинства и правила Борда максимальные значения I_1 соответствуют ФПИ $1Winner$, наименее информативной ФПИ, из которой правила вычислимы.
- $I_1(3, n, 1Winner, F)$ очень быстро стремится к 1 с ростом числа избирателей для правила относительного большинства и правила Борда.

Результаты вычислительных экспериментов

- Манипулируемость слабо возрастает с уменьшением информативности ФПИ (на последовательности ФПИ от Profile до Rank) для правила Коупленда. Максимальные значения $I_1(3, n, 1Winner, Copeland)$ стремятся к 1.
- Максимальные значения I_1 для правила одобряющего голосования с квотой 2 соответствуют ФПИ *Rank*. При алфавитном правиле устранения несравнимости это правило защищено от манипулирования при ФПИ $1Winner$.
- (!) В большинстве случаев манипулируемость увеличилась по сравнению со случаем полной информации.

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- Первый индекс оказался недостаточно показательным в случае с неполной информацией.
- Предлагаются два альтернативных способа измерения манипулируемости: I_2 - индекс успеха манипулирования, I_3 - агрегированный индекс стимула к манипулированию.

$I_2(m, n, \pi, F)$ - вероятность того, что в профиле предпочтений, случайно выбранном из $L(X)^N$, существует хотя бы один избиратель, который имеет стимул манипулировать при функции F и ФПИ π, и его манипулирование приводит к успеху в этом профиле.

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- Подмножество информационного множества избирателя i, профили, где достигается успех при манипулировании:

$$WS_i^{\pi(\vec{P})}(\tilde{P}_i) = \{\vec{P}'_{-i} \in W_i^{\pi(\vec{P})} : C_F(\tilde{P}_i, \vec{P}'_{-i}) EP_i C_F(\vec{P})\}.$$

- Стимул к манипулированию для избирателя i

$$stimulus(i, \vec{P}, \pi(\vec{P})) = \begin{cases} max_{\tilde{P}_i \in L(X)} \dfrac{|WS_i^{\pi(\vec{P})}(\tilde{P}_i)|}{|W_i^{\pi(\vec{P})}|}, \text{если избиратель } i \\ \text{имеет стимул манипулировать,} \\ \text{при ФПИ } \pi, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

$$I_3(m, n, \pi, F) = \sum_{\vec{P} \in L(X)^N} max_{i \in N}(stimulus(i, \vec{P}))/(m!)^n.$$

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- По определению, $I_2(m,n,\pi,F) \leq I_1(m,n,\pi,F)$ и $I_3(m,n,\pi,F) \leq I_1(m,n,\pi,F)$.
- В случае полной информации, $\pi(\vec{P}) = \vec{P}$, все три индекса равны $I_1(m,n,\mathit{Profile},F) = I_2(m,n,\mathit{Profile},F) = I_3(m,n,\mathit{Profile},F)$.

Теорема 5

Если функция F сильно вычислима из ФПИ π, то $I_2(m,n,\pi,F) = I_3(m,n,\pi,F) = I_1(m,n,\mathit{Profile},F)$.

Теорема 6

$\lim_{n\to\infty} I_3(m,n,\mathit{Winner},\mathit{Plurality}) = 0$ при Leximin и Leximax.
$\lim_{n\to\infty} I_3(m,n,1\mathit{Winner},\mathit{Plurality}) = 0$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Вычислительные эксперименты: l_2 и l_3 для правила относительного большинства

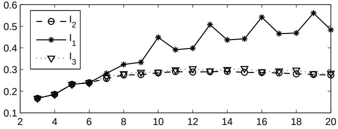

Рис.: ФПИ *Rank*

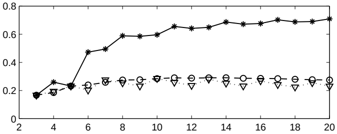

Рис.: ФПИ *Winner*

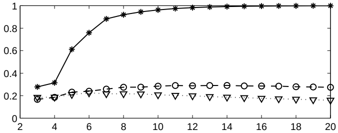

Рис.: ФПИ 1*Winner*

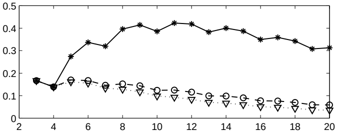

Рис.: ФПИ *WMG*

Вычислительные эксперименты: I_2 и I_3 для правила относительного большинства

- Индекс успеха манипулирования, I_2, вычисленный для ФПИ *Rank* и ФПИ *Winner*, оказался равным $I_1(m, n, Profile, Plurality)$.
- I_2 и I_3 почти всегда строго ниже, чем I_1.
- Для ФПИ *Rank*, *Winner* и *1Winner* разница между I_1 возрастает с возрастанием числа избирателей.
- I_3 принимает наименьшие значения для *1Winner*, т.е. наименее информативная ФПИ дает наименьший стимул к манипулированию.
- Если F не вычислима из π, как в случае правила относительного большинства и *WMG*, то значения индексов I_2 и I_3 очень низкие.

Заключение

- Рассмотрена степень манипулируемости правил коллективного выбора при неполной информации различного типа.
- Первый индекс - вероятность того, что в профиле найдется избиратель, который имеет стимул манипулировать при ФПИ π.
- Значения I_1 часто очень высокие, а для некоторых ФПИ приближаются к 100%.
- Предложены два других индекса, вероятность успеха манипулирования и агрегированный индекс стимула к манипулированию.
- К сожалению, неполнота информации не играет никакой роли, если избиратели могут вычислить победителя голосования по имеющейся информации.
- К счастью, стимул избирателей к манипулированию очень быстро падает при росте числа избирателей, если публичная информация - информация о победителях

Спасибо за внимание!