

Манипулирование при неполной информации

Юлия Веселова

Международная научно-учебная лаборатория анализа и выбора решений,
НИУ ВШЭ; Институт проблем управления РАН

Семинар "Математическая экономика", ЦЭМИ РАН,
28 февраля 2017

Введение

- Правила коллективного выбора подвержены манипулированию со стороны избирателей: избиратели, действуя стратегически, могут добиться более выгодного для них результата голосования, намеренно исказив свои предпочтения.
- Теорема, доказанная в (Gibbard, 1973) и (Satterthwaite, 1975), утверждает, что любая недиктаторская процедура, в которой участвуют хотя бы три кандидата, является манипулируемой.
- Сравнение правил по степени манипулируемости: вычисление вероятности манипулирования (Kelly, 1993), (Aleskerov, Kurbanov, 1999), (Aleskerov et al. 2011).
- Случай с неполной информацией: модель, предложенная в (Reijngoud, Endriss, 2012).

Модель: термины и обозначения

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество избирателей.
- X - множество альтернатив, $|X| = m$. $L(X)$ - множество всех линейных порядков на X . $W(X)$ - множество всех слабых порядков на X .
- $P_i \in L(X)$ - предпочтения избирателя i на X .
- Если $aP_i b$, то альтернатива a более предпочтительна, чем альтернатива b для избирателя i .
- Профиль предпочтений - вектор $\vec{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$.
Анонимный профиль предпочтений $\vec{p} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$.
- Вектор распределения позиций для a – $v(a, \vec{P}) = (v_1(a), \dots, v_m(a))$, где $v_j(a)$ – количество избирателей, у которых a на j -ом месте в предпочтениях.
- P_M – мажоритарное отношение: $aP_M b$ если $|\{i \in N : aP_i b\}| > |\{i \in N : bP_i a\}|$.

Модель: термины и обозначения

- Взвешенный граф мажоритарного отношения

$$WMG(\vec{P})_{kl} = |\{i \in N : a_k P_i a_l\}|$$

- Граф мажоритарного отношения

$$MG(\vec{P})_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{if } a_k P a_l, \\ -1, & \text{if } a_l P a_k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- \vec{P}_{-i} - профиль предпочтений всех избирателей, кроме i .
- $F : L(X)^N \rightarrow W(X)$ - функция общественного благосостояния.
- $C_F : L(X)^N \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ - правило коллективного выбора.

Правила коллективного выбора

- Правила подсчета очков

$$c \in C_F(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg \max_{a \in A} (\langle s_F, v(a, \vec{P}) \rangle)$$

- Правило относительного большинства $s_{PI} = (1, 0, \dots, 0)$,
 - Одобряющее голосование с квотой q (если $q = m - 1$, правило вето) $s_{App} = (\underbrace{1, \dots, 1}_q, 0, \dots, 0)$.
 - Правило Борда $s_B = (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0)$.
- Правило Коупленда. Выбирается альтернатива, для которой количество побед минус количество поражений по мажоритарному отношению наибольшее, т.е.

$$CS(a, \vec{P}) = |\{b \in A | aP_M b\}| - |\{b \in A | bP_M a\}|,$$

$$c \in C_{Copeland1}(\vec{P}) \Leftrightarrow c \in \arg \max_{a \in A} CS(a, \vec{P}).$$

Множественный выбор

- Правило устранения несравнимости $T : 2^X \setminus \emptyset \rightarrow X$.
- Алфавитное правило: предполагаем заданным некоторый линейный порядок на X , $aP_T bP_T c\dots$, и из данного множества A выбираем недоминируемую по этому отношению альтернативу.
- Методы расширения предпочтений: Leximin и Leximax.
Если предпочтения избирателя $xP_i yP_i z$, то расширенные предпочтения, EP_i
 - согласно Leximin:
 $\{x\}EP_i\{x, y\}EP_i\{y\}EP_i\{x, z\}EP_i\{x, y, z\}EP_i\{y, z\}EP_i\{z\}$.
 - согласно Leximax:
 $\{x\}EP_i\{x, y\}EP_i\{x, y, z\}EP_i\{x, z\}EP_i\{y\}EP_i\{y, z\}EP_i\{z\}$.

Моделирование неполной информации

- Функция публичной информации (ФПИ) (poll information function), введенная в (Reijngoud, Endriss, 2012), может быть интерпретирована как результат предварительного опроса избирателей, оглашаемый перед выборами.

- 1 Профиль $\pi(\vec{P}) = \vec{P}$.
- 2 Анонимный профиль: $\pi(\vec{P}) = \vec{p}(\vec{P}) = (n_1, \dots, n_m)$.
- 3 Позиции: $\pi(\vec{P}) = \vec{v}(\vec{P}) = (v(a_1), \dots, v(a_m))$.
- 4 Очки: $\pi(\vec{P}) = \vec{S}(\vec{P}) = (S(a_1), \dots, S(a_m))$ определяется согласно правилу F .
- 5 Ранжирование: $\pi(\vec{P}) = F(\vec{P})$.
- 6 Победитель: $\pi(\vec{P}) = C_F(\vec{P})$.
- 7 Единственный победитель: $\pi(\vec{P}) = T(C_F(\vec{P}))$
- 8 Взвешенный граф мажоритарного отношения:
 $\pi(\vec{P}) = WMG(\vec{P})$.
- 9 Граф мажоритарного отношения: $\pi(\vec{P}) = MG(\vec{P})$.

Информационное множество

- Располагая информацией о профиле $\pi(\vec{P})$ и зная свои предпочтения, избиратель i строит свое информационное множество

$$W_i^{\pi(\vec{P})} = \{P_{-i}^{\vec{P}} \in L(X)^{N \setminus \{i\}} : \pi(P_i, P_{-i}^{\vec{P}}) = \pi(\vec{P})\}$$

- Если $\forall \vec{P} \in L(X)^N \forall i \in N W_i^{\pi(\vec{P})} \subseteq W_i^{\pi'(\vec{P})}$, то π не менее информативна, чем π' .
- Правило C_F вычислимо из π , если существует функция $H : I \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$, т.ч. $C_F = H \circ \pi$.
- Правило C_F сильно вычислимо из π , если информации π достаточно избирателю i , чтобы вычислить результат C_F для любого предпочтения $\tilde{P}_i \in L(X)$.

Функции публичной информации

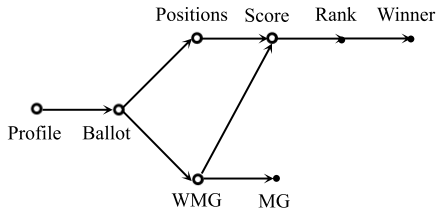


Рис.: Информативность и вычислимость ФПИ для правила Борда

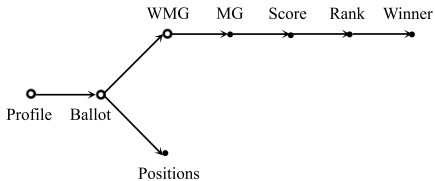


Рис.: Информативность и вычислимость ФПИ для правила Коупленда

Манипулирование при ФПИ π

- Дана функция F и профиль предпочтений \vec{P} .
Избиратель i имеет стимул к манипулированию при ФПИ π , если $\exists \tilde{P}_i$ т.ч.
 - i) $\forall P_{-i}^{\vec{P}} \in W_i^{\pi(\vec{P})} C_F(\tilde{P}_i, P_{-i}^{\vec{P}}) EP_i C_F(\vec{P})$ или $C_F(\tilde{P}_i, P_{-i}^{\vec{P}}) EI_i C_F(\vec{P})$;
 - ii) $\exists P_{-i}^{\vec{P}} \in W^{\pi(\vec{P})}$, s.t. $C_F(\tilde{P}_i, P_{-i}^{\vec{P}}) EP_i C_F(\vec{P})$.
- Функция F называется подверженной манипулированию при ФПИ π , если $\exists \vec{P} \in L(X)^N$ и $\exists i \in N$, который имеет стимул манипулировать при ФПИ π в профиле \vec{P} .
- $I_1(m, n, \pi, F)$ - вероятность того, что в профиле предпочтений, случайно выбранном из $L(X)^N$, есть хотя бы один избиратель, имеющий стимул манипулировать при функции F и ФПИ π .

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π , то

$$I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, \text{Profile}, F).$$

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π , то

$$I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, \text{Profile}, F).$$

Теорема 2

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при Leximin и Leximax.

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{1 Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π , то

$$I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, \text{Profile}, F).$$

Теорема 2

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при Leximin и Leximax.

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{1 Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теорема 3

При Leximin, $I_1(3, 3, \text{MG}, \text{Borda}) = 1$.

Теоретические результаты

Теорема 1

Если функция F сильно вычислима из π , то

$$I_1(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, \text{Profile}, F).$$

Теорема 2

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при Leximin и Leximax.

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(m, n, \text{1 Winner}, \text{Plurality}) = 1$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Теорема 3

При Leximin, $I_1(3, 3, \text{MG}, \text{Borda}) = 1$.

Теорема 4

При Leximax, $I_1(3, n, \text{Winner}, \text{Copeland}) = 0$ для нечетного числа избирателей.

Вычислительные эксперименты

Проведена серия вычислительных экспериментов в MatLab для 6 правил коллективного выбора, 8 ФПИ, для Leximin, Leximax и алфавитного правила устранения несравнимости. Число альтернатив - 3, число избирателей - от 3 до 15.

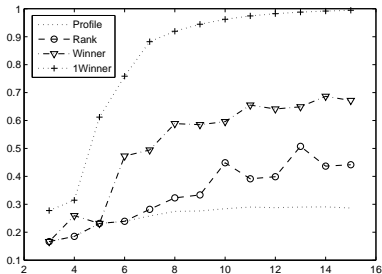


Рис.: $I_1(3, n, \pi, Plurality)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

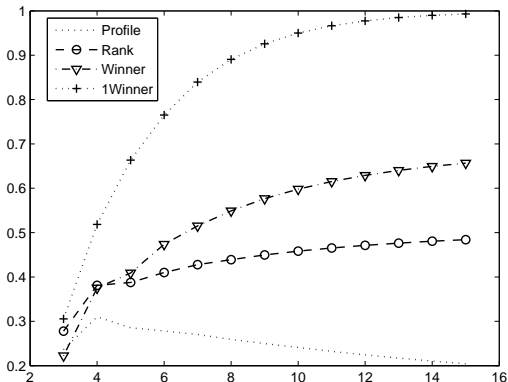


Рис.: $I_1(3, n, \pi, \text{Borda})$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

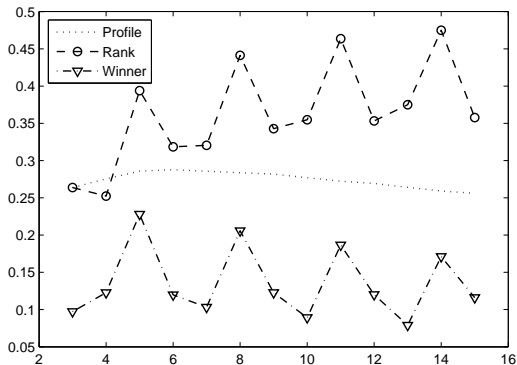


Рис.: $l_1(3, n, \pi, Veto)$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

Вычислительные эксперименты

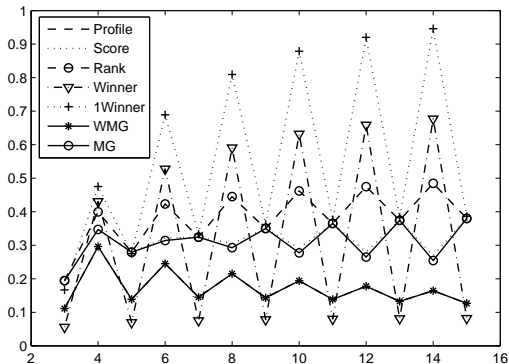


Рис.: $I_1(3, n, \pi, \text{Copeland})$ при алфавитном правиле устранения несравнимости

I_1 при алфавитном правиле устранения несравнимости

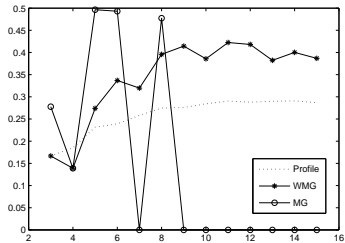


Рис.: $I_1(3, n, \pi, \text{Plurality})$

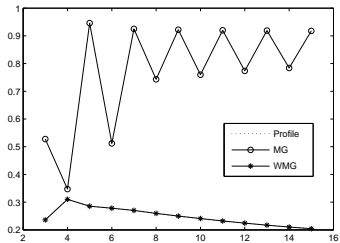


Рис.: $I_1(3, n, \pi, \text{Borda})$

Результаты вычислительных экспериментов

- Манипулируемость не уменьшается, когда мы рассматриваем менее информативные ФПИ.
- Для правила относительного большинства и правила Борда максимальные значения I_1 соответствуют ФПИ **1 Winner**, наименее информативной ФПИ, из которой правила вычислимы.
- $I_1(3, n, 1 \text{ Winner}, F)$ очень быстро стремится к 1 с ростом числа избирателей для правила относительного большинства и правила Борда.

Результаты вычислительных экспериментов

- Манипулируемость слабо возрастает с уменьшением информативности ФПИ (на последовательности ФПИ от Profile до Rank) для правила Коупленда. Максимальные значения $I_1(3, n, 1 \text{ Winner}, \text{Copeland})$ стремятся к 1.
- Максимальные значения I_1 для правила одобряющего голосования с квотой 2 соответствуют ФПИ *Rank*. При алфавитном правиле устранения несравнимости это правило защищено от манипулирования при ФПИ *1 Winner*.
- (!) В большинстве случаев манипулируемость увеличилась по сравнению со случаем полной информации.

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- Первый индекс оказался недостаточно показательным в случае с неполной информацией.
- Предлагаются два альтернативных способа измерения манипулируемости: I_2 - индекс успеха манипулирования, I_3 - агрегированный индекс стимула к манипулированию.

$I_2(m, n, \pi, F)$ - вероятность того, что в профиле предпочтений, случайно выбранном из $L(X)^N$, существует хотя бы один избиратель, который имеет стимул манипулировать при функции F и ФПИ π , и его манипулирование приводит к успеху в этом профиле.

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- Подмножество информационного множества избирателя i , профили, где достигается успех при манипулировании:

$$WS_i^{\pi(\vec{P})}(\vec{P}_i) = \{\vec{P}'_{-i} \in W_i^{\pi(\vec{P})} : C_F(\vec{P}_i, \vec{P}'_{-i})EP_iC_F(\vec{P})\}.$$

- Стимул к манипулированию для избирателя i

$$stimulus(i, \vec{P}, \pi(\vec{P})) = \begin{cases} \max_{\vec{P}'_{-i} \in L(X)} \frac{|WS_i^{\pi(\vec{P})}(\vec{P}_i)|}{|W_i^{\pi(\vec{P})}|}, & \text{если избиратель } i \\ & \text{имеет стимул манипулировать,} \\ & \text{при ФПИ } \pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$I_3(m, n, \pi, F) = \sum_{\vec{P} \in L(X)^N} \max_{i \in N} (stimulus(i, \vec{P})) / (m!)^n.$$

Успех манипулирования и стимул к манипулированию

- По определению, $I_2(m, n, \pi, F) \leq I_1(m, n, \pi, F)$ и $I_3(m, n, \pi, F) \leq I_1(m, n, \pi, F)$.
- В случае полной информации, $\pi(\vec{P}) = \vec{P}$, все три индекса равны $I_1(m, n, Profile, F) = I_2(m, n, Profile, F) = I_3(m, n, Profile, F)$.

Теорема 5

Если функция F сильно вычислима из ФПИ π , то $I_2(m, n, \pi, F) = I_3(m, n, \pi, F) = I_1(m, n, Profile, F)$.

Теорема 6

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3(m, n, Winner, Plurality) = 0$ при Leximin и Leximax.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_3(m, n, 1 Winner, Plurality) = 0$ при алфавитном правиле устранения несравнимости.

Вычислительные эксперименты: I_2 и I_3 для правила относительного большинства

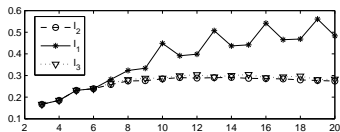


Рис.: ФПИ Rank

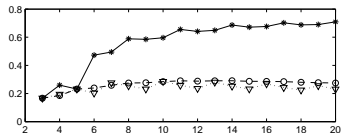


Рис.: ФПИ Winner

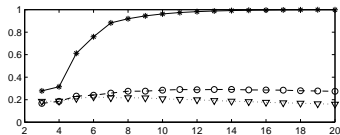


Рис.: ФПИ 1 Winner

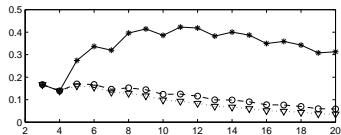


Рис.: ФПИ WMG

Вычислительные эксперименты: I_2 и I_3 для правила относительного большинства

- Индекс успеха манипулирования, I_2 , вычисленный для ФПИ *Rank* и ФПИ *Winner*, оказался равным $I_1(m, n, Profile, Plurality)$.
- I_2 и I_3 почти всегда строго ниже, чем I_1 .
- Для ФПИ *Rank*, *Winner* и *1 Winner* разница между I_1 возрастает с возрастанием числа избирателей.
- I_3 принимает наименьшие значения для *1 Winner*, т.е. наименее информативная ФПИ дает наименьший стимул к манипулированию.
- Если F не вычислима из π , как в случае правила относительного большинства и *WMG*, то значения индексов I_2 и I_3 очень низкие.

Заключение

- Рассмотрена степень манипулируемости правил коллективного выбора при неполной информации различного типа.
- Первый индекс - вероятность того, что в профиле найдется избиратель, который имеет стимул манипулировать при ФПИ π .
- Значения I_1 часто очень высокие, а для некоторых ФПИ приближаются к **100%**.
- Предложены два других индекса, вероятность успеха манипулирования и агрегированный индекс стимула к манипулированию.
- К сожалению, неполнота информации не играет никакой роли, если избиратели могут вычислить победителя голосования по имеющейся информации.
- К счастью, стимул избирателей к манипулированию очень быстро падает при росте числа избирателей, если публичная информация - информация о победителях

Спасибо за внимание!