Обратные задачи в проблеме распределения ресурсов.

Е.Г. Молчанов,
А.А. Шананин

Содержание доклада

- Введение. Новые проблемы математической экономики в условиях глобализации.
- Модель Хаутеккера - Йохансена распределения ресурсов с замещением производственных факторов на макро уровне.
- Агрегирование и постановка обратной задачи. Теоремы Бернштейна о характеризации преобразования Радона неотрицательных мер с носителем в конусе.
- Модель распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне. Новые задачи интегральной геометрии.
- Задача об оценке эластичности замещения производственных факторов на микро уровне и её связь с исследованием комбинаторных структур.

Модель Хаутеккера-Иохансена

- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – технология;
- $\mu(dx)$ – неотрицательная мера, задающая распределение мощностей по технологиям;
- $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вектор производственных затрат текущего пользования;
- $u(x)$ – коэффициент загрузки мощности;
- $F(l)$ – производственная функция, т.е. зависимость выпуска от затрат производственных факторов.

Задача распределения ресурсов в модели Хаутеккера - Йохансена

$$(1)\quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}_+^n} u(x)\mu\left(dx\right) \to \max \\ \int_{\mathbb{R}_+^n} xu(x)\mu\left(dx\right) < l, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases}$$

Обобщённая лемма Неймана - Пирсона

- Если $l \geq 0$, то задача (1) имеет решение.
- Если $u_0(x)$ – решение задачи (1), то существуют неравные нулю одновременно множители Лагранжа $p_0 \geq 0, \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$ такие, что

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ для почти всех по мере } \mu(\cdot)\ x, \text{таких что } p_0 < \mathbf{px} \\ 1 \text{ для почти всех по мере } \mu(\cdot)\ x, \text{таких что } p_0 > \mathbf{px} \end{cases}$$

$$p_j\left(l_j - \int_{\mathbb{R}_+^n} x_j u_0(x)\mu(dx)\right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

- Если $p_0 > 0, \boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n) \geq 0, l = \int_{\mathbb{R}_+^n} x\theta(x)\mu(dx),$ то $u(x) = \theta(p_0 - \mathbf{px})$ является решением задачи (1).

Двойственность производственной функции и функции прибыли

- Функция прибыли

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \int\limits_{R_+^n} \left(p_0 - px\right)_+ \mu\left(dx\right), \qquad (2)$$

- Производственная функция $F\left(l\right)$ является вогнутой, монотонно

,

неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi\left(p, p_0\right) = \sup_{l \geq 0}\left(p_0 F\left(l\right) - pl\right),$$

$$F\left(l\right) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \geq 0}\left(\Pi\left(p, p_0\right) + pl\right).$$

Агрегирование

- $F_0\left(X^0\right)$ положительно однородная, вогнутая, положительная, непрерывная на R_+^n функция полезности;
- $q_0\left(p\right)$ индекс цен.

$$q_0\left(p\right)=\inf_{\left\{X^0\ge 0 \middle| F_0\left(X^0\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{F_0\left(X^0\right)},$$

$$F_0\left(X^0\right)=\inf_{\left\{p\ge 0 \middle| q_0\left(p\right)>0\right\}}\frac{pX^0}{q_0\left(p\right)}.$$

- $X^j=\left(X_1^j,\ldots,X_m^j\right)$ - поставки в j отрасль продукции других отраслей,
- $l^j=\left(l_1^j,\ldots,l_n^j\right)$ - поставки в j отрасль первичных ресурсов.
- $F_j\left(X^j,l^j\right)$ - производственная функция j отрасли.

Задача распределения ресурсов (нелинейный межотраслевой баланс)

$l = \left(l_1, \ldots, l_n\right)$ суммарные поставки первичных ресурсов.

$$
(3)\begin{cases}
F_0\left(X^0\right) \to \max \\
F_j\left(X^j, l^j\right) \geq \sum\limits_{i=0}^{m} X_j^i, \quad \left(j = 1, \ldots, m\right) \\
\sum\limits_{j=1}^{m} l^j \leq l, \\
X^0 \geq 0, X^1 \geq 0, \ldots, X^m \geq 0, l^1 \geq 0, \ldots, l^m \geq 0.
\end{cases}
$$

Равновесные рыночные механизмы

Пусть $l > 0$. Для того, чтобы набор векторов $X^0, X^1, ..., X^m, l^1, ..., l^m$, удовлетворяющий ограничениям задачи (3), являлся её решением необходимо и достаточно, чтобы существовали $p_0 > 0, p = (p_1, ..., p_m) \geq 0, s = (s_1, ..., s_n) \geq 0$ такие, что

$$X^0 \in Arg\max\left\{ p_0 F_0\left(\tilde{X}\right) - p\tilde{X} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0 \right\},$$

$$\left(X^j, l^j\right) \in Arg\max\left\{ p_j F_j\left(\tilde{X}, \tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l} \,\middle|\, \tilde{X} \geq 0, \tilde{l} \geq 0 \right\}, \; (j = 1, ..., m)$$

$$p_j \left(F_j\left(X^j, l^j\right) - \sum_{i=0}^{m} X_j^i \right) = 0, (j = 1, ..., m)$$

$$s_k \left(l_k - \sum_{j=1}^{m} l_k^j \right) = 0 (j = 1, ..., m).$$

Агрегированное макро описание

$$\Pi_j(s,p) = \sup_{\tilde{X}\geq 0,\tilde{l}\geq 0}\left(p_j F_j\left(\tilde{X},\tilde{l}\right) - p\tilde{X} - s\tilde{l}\right)$$ функция прибыли j отрасли.

$F^A(l)$ - агрегированная производственная функция.

Вариационный принцип (двойственная задача)

$$\Pi^A(s,p_0) = \min\left\{\sum_{j=1}^{m}\Pi_j(s,p) \middle| p\geq 0, s\geq 0, q_0(p)\geq p_0\right\}.$$

$\Pi^A(s,p_0)$ - агрегированная функция прибыли.

Постановка обратной задачи

$$\Pi^A(s, p_0) = \sup_{l \geq 0}\left(p_0 F^A(l) - sl\right),$$

$$F^A(l) = \frac{1}{p_0}\inf_{s \geq 0}\left(\Pi^A(s, p_0) + sl\right).$$

Найти неотрицательную меру $\mu_A(\bullet)$ с носителем в R_+^n, такую, что

$$\Pi^A(s, p_0) = \int_{R_+^n}(p_0 - sx)_+ \mu_A(dx).$$

Связь с задачами интегральной геометрии

$$\frac{\partial^2 \Pi^A(s, p_0)}{\partial p_0^2} = \int\limits_{sx=p_0} \mu_A(dx)$$

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-sx}\mu(dx) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau \left(\frac{\partial \Pi^A(s,\tau)}{\partial \tau} \right)$$

Теорема единственности (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)**.**

Пусть заряд $\mu(\bullet)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{R_+^n} e^{-A\|x\|} |\mu|(dx) < \infty \text{ для некоторого } A > 0, \qquad (4)$$

$$\int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \mu(dx) = 0 \text{ для любых } p_0 > 0, s \in K,$$

где K – открытый конус в R_+^n. Тогда $\mu(\bullet) = 0$.

Теорема о характеризации (Г.М.Хенкин, А.А.Шананин)

Функция $\Pi(s, p_0)$ представима в виде

$$\Pi(s, p_0) = \int_{R_+^n} (p_0 - sx)_+ \, \mu(dx) \; при \; (s, p_0) \in R_+^{n+1},$$

где $\mu(\bullet)$ неотрицательная мера с носителем в R_+^n, удовлетворяющая условию (4) тогда и только тогда, когда

1) $\Pi(s, p_0)$ положительно однородная, выпуклая функция на R_+^{n+1}, причём при фиксированном $s \in R_+^n$ мера $\partial^2 \Pi(s, \tau) / \partial \tau^2$ экспоненциально убывает при $\tau \to +\infty$;

2) функция $G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau \left(\frac{\partial \Pi^A(s, \tau)}{\partial \tau} \right) \in C^\infty(R_+^n)$ и для некоторого

открытого конуса $\Gamma \subset \operatorname{int} R_+^n$ и некоторого $s \in \Gamma$ при любых $\lambda > 0$,

$$\xi^1 \in \Gamma, ..., \xi^k \in \Gamma, k = 1, 2, ...$$

$$(-1)^k D_{\xi^1} ... D_{\xi^k} G(\lambda s) \geq 0, \; где \; D_\xi = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial s_j} \; для \; \xi = (\xi_1, ..., \xi_n).$$

Пример 1

Пусть *n=2*, производственная функция типа CES

$$F_{CES}\left(l_1,l_2\right)=\left(\alpha_1 l_1^{-\rho}+\alpha_2 l_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}},\ где\ \alpha_1>0,\alpha_2>0,\rho\geq 1,0<\gamma<1.$$

Тогда функция прибыли равна

$$\Pi_{CES}\left(s_1,s_2,p_0\right)=\gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(1-\gamma\right)p_0^{\frac{1}{1-\gamma}}\left(\alpha_1^{\frac{1}{1+\rho}}s_1^{\frac{\rho}{1+\rho}}+\alpha_2^{\frac{1}{1+\rho}}s_2^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{\gamma(1+\rho)}{\rho(1-\gamma)}}$$

При $\rho>-1$ существует распределение мощностей по технологиям, соответствующее этим функциям.

Пример 2

Пусть $m = 2, n = 2, F_0\left(X_1^0, X_2^0\right) = \min\left(X_1^0, X_2^0\right),$

$$\mu_1(dx) = k_0\delta(x - z), z = (z_1, z_2),$$

$$\mu_2(dx) = k_1\delta\left(x - y^1\right) + k_2\delta\left(x - y^2\right), y^j = \left(y_1^j, y_2^j\right), j = 1, 2,$$

$$k_1 + k_2 > k_0, y_1^1 > y_1^2, y_2^1 > y_2^2.$$

Тогда

$$\Pi^A(s, p_0) = \max\Big\{(k_0 - k_2)_+\left(p_0 - s\left(z + y^1\right)\right)_+ + \min(k_0, k_2)\left(p_0 - s\left(z + y^2\right)\right)_+,$$

$$\min(k_0, k_1)\left(p_0 - s\left(z + y^1\right)\right)_+ + (k_0 - k_2)_+\left(p_0 - s\left(z + y^2\right)\right)_+\Big\}.$$

Обозначим $K_1 = \left\{s \in R_+^2 \,\middle|\, sy^2 \le sy^1\right\}, K_2 = \left\{s \in R_+^2 \,\middle|\, sy^1 \le sy^2\right\}.$

Получаем $\Pi^A(s, p_0) = \max\limits_j \Pi_j(s, p_0), \Pi_j(s, p_0) = \int\limits_{R_+^n} (p_0 - sx)_+\, \mu_j(dx),$

$$\Pi^A(s, p_0) = \Pi_j(s, p_0) \text{ при } s \in K_j;\ R_+^n = \bigcup_j K_j,$$

$$G(s) = \max_j G_j(s), G_j(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} d_\tau \left(\frac{\partial \Pi_j(s, \tau)}{\partial \tau}\right).$$

Теорема о стабильных соответствиях (А.В.Карзанов, А.А.Шананин)

Пусть $X=\{x^1,...,x^m\}\subset R_+^n, Y=\{y^1,...,y^m\}\subset R_+^n$ и С конус в R_+^n.
Определение. Биекцию $\gamma : X\to Y$ назовём С-стабильным соответствием, если для любых $x^i\in X, x^j\in X, p\in C$ из $px^i<px^j$ следует, что $p\gamma(x^i)\le p\gamma(x^j)$.

Теорема. Для того, чтобы биекция $\gamma : X\to Y$ была С-стабильным соответствием необходимо и достаточно, чтобы для любых $x^i\in X, x^j\in X$
если $x^j\neq x^i, x^j-x^i\in C^*$, то $\gamma(x^j)-\gamma(x^i)\in C^*$;
если $x^j-x^i\notin C^*$, $x^i-x^j\notin C^*$, то существуют такие числа $\lambda\ge 0, \mu\ge 0, \lambda+\mu>0$, что $\lambda(x^j-x^i)=\mu(\gamma(x^j)-\gamma(x^i))$.

Модель отрасли с замещением производственных факторов на микро уровне

$f(u)$ положительно однородная первой степени, вогнутая, непрерывная функция на R_+^n, положительная на $\operatorname{int} R_+^n$. Параметры технологии задаются вектором $x = (x_1, ..., x_n)$.

Производственная функция на микро уровне $f\left(\frac{u_1}{x_1}, ..., \frac{u_n}{x_n}\right)$

Примеры: леонтьевская функция с постоянными пропорциями $f(u) = \min(u_1, ..., u_n)$ соответствует производственной функции на микро уровне в модели Хаутеккера – Йохансена;

CES функция

$$f(u) = \left(u_1^{-\rho} + ... + u_n^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = u_1 \oplus_\rho ... \oplus_\rho u_n, \rho \geq -1.$$

Задача распределения ресурсов с замещением производственных факторов на микро уровне

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{R_+^n} \min\left(1,\, f\left(\frac{u_1(x)}{x_1},\dots,\frac{u_n(x)}{x_n}\right)\right)\mu(dx) \to \max_{u(x)} \\ \displaystyle\int_{R_+^n} u_j(x)\,\mu(dx) \le l_j,\ j=1,\dots,n; \\ u(x) = \left(u_1(x),\dots,u_n(x)\right) \ge 0. \end{cases}$$

Положим $\quad q(p) = \inf\limits_{\{u\ge 0 \mid f(u)>0\}} \dfrac{pu}{f(u)},$

$$p \circ x = \left(p_1 x_1, \dots, p_n x_n\right),\ \pi\left(x, p, p_0\right) = \left(p_0 - q\left(p \circ x\right)\right)_+ .$$

Исследование задачи (5)

- Если $l \geq 0$, то задача (5) имеет решение в классе вектор – функций $u(x)$ с интегрируемыми по мере $\mu(\bullet)$ компонентами.
- Для того, чтобы распределение ресурсов $u(x) = (u_1(x),...,u_n(x))$ удовлетворяющее ограничениям в задаче (5), было её оптимальным решением необходимо, а при $l > 0$ достаточно, чтобы существовали такие не равные нулю одновременно числа $p_0 \geq 0, p = (p_1,..., p_n) \geq 0,$ что,

$$p_j \left(l_j - \int\limits_{R_+^n} u_j(x)\mu(dx) \right) = 0 \ \ (j = 1,...,n),$$

$u(x) = 0$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n,$ таких, что $p_0 < q(p \circ x),$
$f(u(x)), p_0 - pu(x) = \pi(x, p, p_0)$ при почти всех по мере $\mu(\bullet), x \in R_+^n$ таких, что $p_0 > q(p \circ x)$.

Двойственность производственной функции и функции прибыли в модели с замещением производственных факторов на микро уровне

- Функция прибыли

$$\Pi(p, p_0) = \int_{R_+^n} \left(p_0 - q(p \circ x)\right)_+ \mu(dx), \qquad (6)$$

- Производственная функция $F(l)$ является вогнутой, монотонно

,

неубывающей, непрерывной на R_+^n.

$$\Pi(p, p_0) = \sup_{l \geq 0} \left(p_0 F(l) - pl\right),$$

$$F(l) = \frac{1}{p_0} \inf_{p \geq 0} \left(\Pi(p, p_0) + pl\right).$$

Характеризация преобразования (6) (А.Д.Агальцов)

Обозначим

$$c=\left(c_1,\ldots,c_n\right)\in\operatorname{int}R_+^n,\ z=\left(z_1,\ldots,z_n\right),\ x^{z-I}=x_1^{z_1-1}\ldots x_n^{z_n-1},\ x^{-z}=x_1^{-z_1}\ldots x_n^{-z_n},$$

$$\rho_q\left(z\right)=\Gamma\left(z_1\right)\ldots\Gamma\left(z_n\right)\Gamma\left(z_1+\ldots+z_n\right)\Bigg/\left(\int\limits_{R_+^n}x^{z-I}e^{-q(x)}dx_1\ldots dx_n\right).$$

Тогда

$$G\left(s\right)=\int\limits_{R_+^n}e^{-sx}\mu\left(dx\right)=\left(2\pi i\right)^{-n}\int\limits_{c+iR_+^n}s^{-z}\rho_q\left(z\right)\left(\int\limits_{R_+^n}p^{z-I}\Pi\left(p,1\right)dp_1\ldots dp_n\right)dz_1\ldots dz_n.$$

Проблема моментов

Исходные данные: $\{\mathbf{p}^t, p_0^t, y^t | t = 1, \dots T\}$, где $\mathbf{p}^t$ – вектор цен на производственные факторы, p_0^t – цена на выпускаемую продукцию, y^t – объём произведённой продукции в период времени t.

Пусть $q(\mathbf{p}) = \left(p_1^{-\rho} + \cdots + p_n^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, где $\rho \geq -1$

Постановка задачи: найти значения ρ, при которых существует неотрицательная мера $\mu(dx)$, удовлетворяющая

$$(7)\quad \int_{\mathbb{R}_+^n} \theta\left(p_0^t - \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + \cdots + (p_n^t x_n)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\right) \mu(dx) = y^t, \quad (t = 1, \dots, T)$$

Исследование проблемы моментов (7)

Гиперповерхности $p_0^t = \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + \cdots + (p_n^t x_n)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ разбивают множество $\mathbb{R}_+^n$ на области Λ. Сопоставим каждой области V булевский вектор (спектр области) $\mathbf{b}(V) = \left(b_1(V), \dots b_T(V)\right)$, где

$$b_t(V) = \begin{cases} 1, \text{если } p_0^t > \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + \cdots + (p_n^t x_n)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \text{ при } x \in \operatorname{int} V \\ 0, \text{если } p_0^t < \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + \cdots + (p_n^t x_n)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}} \text{ при } x \in \operatorname{int} V \end{cases}$$

Обозначим через $B\left((\mathrm{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathrm{p}^\mathrm{T}, p_0^\mathrm{T})\right)$ спектр разбиения, т.е. множество векторов $B(V)$, построенных по всевозможным областям Λ разбиения $\mathbb{R}_+^n$ гиперповерхностями $p_0^t = \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + \cdots + (p_n^t x_n)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, t = 1, \dots, T$.

Предложение 1. Проблема моментов (7) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $y = (y^1, \dots, y^T)$ принадлежит выпуклой конической оболочке спектра $B\left((\mathrm{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathrm{p}^\mathrm{T}, p_0^\mathrm{T})\right)$

Необходимое условие разрешимости проблемы моментов

Определим для каждого $t \in \{0, \dots, T\}$ вектор $w(t) = (w_V(t) | V \in \Lambda)$, компоненты которого соответствуют областям Λ и вычисляются по следующему правилу:

$$w_V(t) = \begin{cases} 1, \text{если } b_t(V) = 1, \\ 0, \text{если } b_t(V) = 0. \end{cases}$$

Необходимое условие разрешимости проблемы моментов

Пусть Ω_1 и Ω_2 – произвольные подмножества множества $\{1, \dots, T\}$.

Если $\sum_{t \in \Omega_1} w(t) \geq \sum_{t \in \Omega_2} w(t)$, то $\sum_{t \in \Omega_1} y(t) \geq \sum_{t \in \Omega_2} y(t)$

Дискретная выпуклость

Определение. Назовем конус Γ дискретно выпуклым, если все вершины полиэдров $\Gamma \cap \left\{x = (x_1, \dots, x_T) \middle| -1 \le x_j \le 1, j = 1, \dots, T\right\}$ и $\Gamma^* \cap \left\{y = (y_1, \dots, y_T) \middle| -1 \le y_j \le 1, j = 1, \dots, T\right\}$ имеют координаты, принимающие лишь одно из трёх значений $\{-1,0,1\}$.

Замечание: Семейство дискретно-выпуклых конусов не является замкнутым ни по операции «сумма по Минковскому» , ни по операции пересечения.

Предложение 2. Необходимое условие оказывается и достаточным условием разрешимости проблемы моментов (7) тогда и только тогда, когда конус $\Gamma = \operatorname{cone} B\left((\mathbf{p}^1, p_0^1), \dots, \left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}}, p_0^{\mathrm{T}}\right)\right)$ является дискретно выпуклым.

Предложение 3. Если $n = 2, T \le 5$, то конус Γ является дискретно-выпуклым, а необходимое условие разрешимости - достаточным.

Пример разбиения, для которого необходимое свойство (2) не является достаточным

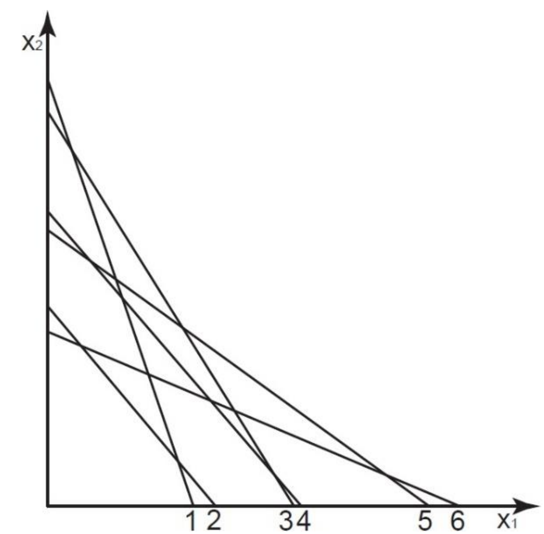
Замечание: Если $n = 2, T > 5$, то конус Γ может не являться дискретно-выпуклым, а необходимое условие разрешимости может не быть достаточным.

Пример при $n = 2, T = 6$:

$$\Gamma = \operatorname{cone}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Gamma^* \cap \{y = (y_1, \dots, y_T) \mid -1 \le y_j \le 1, j = 1, \dots, T\}$

содержит вершину $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Комбинаторные свойства разбиения $\mathbb{R}_+^{\mathbf{2}}$ прямыми

Разбиение $\mathbb{R}_+^{\mathbf{2}}$ псевдопрямыми – разбиение $\mathbb{R}_+^{\mathbf{2}}$ гладкими кривыми $r^t(\alpha), t = 1, \dots, T, \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, такое что

- любые две кривые пересекаются не более одного раза,
- все пересечения трансверсальны.

Понятие спектра $\mathbf{b}(V)$ области V строится аналогично.

S_ρ – множество конических оболочек множеств $B\left(\left(\mathbf{p^1}, p_0^1\right), \dots, \left(\mathbf{p^T}, p_0^{\mathrm{T}}\right)\right)$ при всех различных наборах $\mathbf{p^t}, p_0^t, t = 1, \dots, T$ и фиксированном ρ

S_{pl} – множество конических оболочек множеств $B(\Lambda)$ при всех разрезаниях $\mathbb{R}_+^{\mathbf{2}}$ псевдопрямыми, $S_\rho \subset S_{pl}$

Предложение 4. А) $S_\rho = S_{-1}$ **Б)** $S_{pl} = S_{-1}$ при $T \leq 6$**,** $S_{pl} \neq S_{-1}$ при $T \geq 9$

В) Пусть $\Gamma \in S_{pl}$. Задача принадлежности Γ семейству S_{-1} NP-трудна.

Линейность разбиения R_+^2 CES-кривыми

Далее положим, что количество производственных факторов равно $\boldsymbol{n} = 2$

Замена

- $z_1 = x_1^{-\rho}, z_2 = x_2^{-\rho}, \hat{p}_1^t(\rho) = (p_1^t)^{-\rho}, \hat{p}_2^t(\rho) = (p_2^t)^{-\rho}$, $t = 1, \dots T$ при $\rho \in [-1,0)$
- $z_1 = \frac{\varepsilon x_1^{-\rho}}{x_1^{-\rho}+x_2^{-\rho}-\varepsilon}, z_2 = \frac{\varepsilon x_2^{-\rho}}{x_1^{-\rho}+x_2^{-\rho}-\varepsilon}, \hat{p}_1^t(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} - (p_1^t)^{-\rho}, \hat{p}_2^t(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} - (p_2^t)^{-\rho}, t = 1, \dots T$ при $\rho \in (0, +\infty)$ и таком маленьком $\varepsilon > 0$, что при $x_1^{-\rho} + x_2^{-\rho} = \varepsilon$ верно $p_0^t > \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + (p_2^t x_2)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ для всех $t = 1, \dots T$

сведет к следующей проблеме моментов.

Найти значения ρ, при которых существует неотрицательная мера $\mu(dx)$, удовлетворяющая

$$(7)\quad \int_{\mathbb{R}_+^2} \theta(p_0^t - \hat{p}_1^t(\rho) z_1 - \hat{p}_2^t(\rho) z_2) \mu(dz) = y^t, \quad (t = 1, \dots, T)$$

Сведение к группе Кокстера

1. Перенумеруем $t = 1, \dots, T$ так, чтобы $p_1^1 < p_1^2 < \cdots < p_1^T$.

Замечание: $\forall \rho \in [-1,0)\ p_1^1(\rho) < p_1^2(\rho) < \cdots < p_1^T(\rho)$

2. Обозначим $\left(z_1^{t_1 t_2}, z_2^{t_1 t_2}\right) = (R^{t_1 t_2}, \alpha^{t_1 t_2})$ точки пересечения пар прямых:

$$p_0^{t_1} = \hat{p}_1^{t_1}(\rho) z_1 + \hat{p}_2^{t_1}(\rho) z_2, p_0^{t_2} = \hat{p}_1^{t_2}(\rho) z_1 + \hat{p}_2^{t_2}(\rho) z_2, 1 \le t_1, t_2 \le T \quad (8)$$

Общее количество пересечений пар прямых в $\mathbb{R}_+^2$ - ($|\Lambda| - T - 1$), где $|\Lambda|$ - количество областей.

3. Расположим углы, соответствующие пересечению пар прямых (8) по возрастанию: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{|\Lambda| - T - 1} < \frac{\pi}{2}$.

Будем считать, что угол α_i $(i = 1, \dots, |\Lambda| - T - 1)$ соответствует точке пересечения прямых с номерами $t_1(i)$ и $t_2(i)$, $1 \le t_1(i) < t_2(i) \le T$.

Формальное слово, соответствующее разрезанию

Обозначим $\pi(\alpha) = \big(\pi_1(\alpha), \dots, \pi_T(\alpha)\big) \in S_T$ $-$ порядок пересечения лучом $\left\{z_2 = z_1 \operatorname{tg} \alpha \;\middle|\; \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), z_1 > 0\right\}$ прямых $p_0^t = \hat{p}_1^t(\rho) z_1 + \hat{p}_2^t(\rho) z_2,\ t = 1, \dots, T$, считая к началу координат.

Замечание 1: $\pi(0+0) = id_T \in S_T$.

Замечание 2: $\pi(\alpha_i + 0) = \sigma_{k(i)} {}^\circ \pi(\alpha_i - 0)$, где: $i \in 1, \dots, N$ $(N = |\Lambda| - T - 1)$

$\sigma_{k(i)}$ - транспозиция $(k(i), k(i)+1) \in S_T$, $1 \le k(i) \le T-1$

$\pi\big(k(i)\big) = t_1(i); \pi(k(i)+1) = t_2(i)$

Назовем слово

$$w = \sigma_{k_{(|\Lambda| - T - 1)}} \dots \sigma_{k(2)} \sigma_{k(1)}$$

– формальное словом, соответствующим разбиению $\mathbb{R}_+^2$ на области Λ.

Замечание: формальное слово w задает множество спектров B.

Изменения формальных слов, соответствующих разбиению

Предложение 6. При изменении ρ формальное слово может меняться согласно правилам: А) $\sigma_{t_1}\sigma_{t_2} = \sigma_{t_2}\sigma_{t_1}$, если $|\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1| \geq 2$ Б) $\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_t = \sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t+1}$.

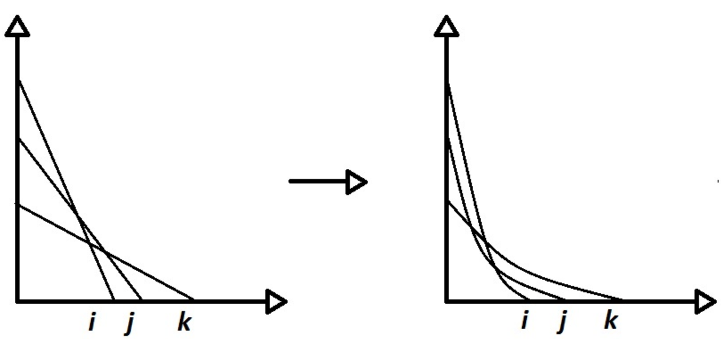
Замечание: Правила Мура-Кокстера для групп Кокстера порядка 3:

А) $\sigma_{t_1}\sigma_{t_2} = \sigma_{t_2}\sigma_{t_1}$, если $|\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1| \geq 2$ **Б)** $\sigma_t\sigma_{t+1}\sigma_t = \sigma_{t+1}\sigma_t\sigma_{t+1}$ **В)** $\sigma_t\sigma_t = 1$

Правило А) не меняет множество областей B, конус Γ и разрешимость (7)

Правило Б) соответствует проходу одной прямой через точку пересечения пары прямых (рисунок).

Правило В) соответствует пересечению пары прямых в минимум двух точках, оно невозможно для указанных формальных слов.



Ромбические тайлинги

Обозначим $\xi_t = \left(1, t - \left[\frac{T}{2}\right]\right), t = 1, \ldots, T$.   .

Сопоставим:

- области V – точку $\xi(V) = \sum_{t=1}^{T} b_t(V)\xi_t$
- углу $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ ломаную («**змейку**») $G_1(\alpha)G_2(\alpha) \ldots G_{T+1}(\alpha)$,

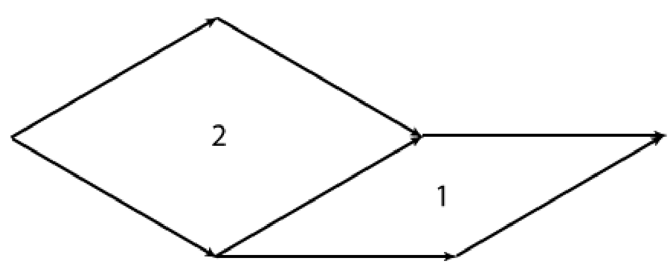
где $G_{T+1}(\alpha) = (0,0), G_t(\alpha) = \sum_{i=t}^{T} \xi_{\pi_i(\alpha)}$

Замечание. $G_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{T} \xi_{\pi_i(\alpha)} = \sum_{i=1}^{T} \xi_i \ \forall\alpha$

Полученная фигура будет являться **ромбическим тайлингом**, соответствующим разбиению.

Транспозиции σ_{t_i} при $\alpha_i, i = 1, \ldots, N$ будет соответствовать **ромб** из вершин $G_{t_i}(\alpha - 0)$, $G_{t_i+1}(\alpha - 0), G_{t_i+2}(\alpha - 0)$, $G_{t_i+1}(\alpha + 0)$

Замечание. Рассмотрим в $\{0,1\}^T$ спектральные вершины областей. Соединим спектральные вершины соседних областей ребрами. Ромбический тайлинг – проекция этой фигуры на подходящую гиперплоскость.



Условия разрешимости проблемы моментов (7)

Предложение 7.

Пусть порядок $\lambda = \big(\lambda(1), \dots, \lambda(T)\big) \in S_T$ такой, что $y\big(\lambda(j)\big) > y\big(\lambda(j+1)\big)$, $j = 1, \dots, T-1$.

- Если змейка, соответствующая порядку λ содержится в ромбическом тайлинге, построенном по разбиению Λ, то проблема моментов (7) разрешима.
- Если змейка, соответствующая порядку λ выходит за пределы ромбического тайлинга, построенного по разбиению Λ, то проблема моментов (7) не разрешима.
  - Пределы тайлинга – область, заключенная между **нижней** и **верхней** змейками: $G_1(0+0)G_2(0+0)\dots G_{T+1}(0+0)$ и $G_1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)G_2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\dots G_{T+1}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$.

Деформации разбиений и флипы ромбических тайлингов

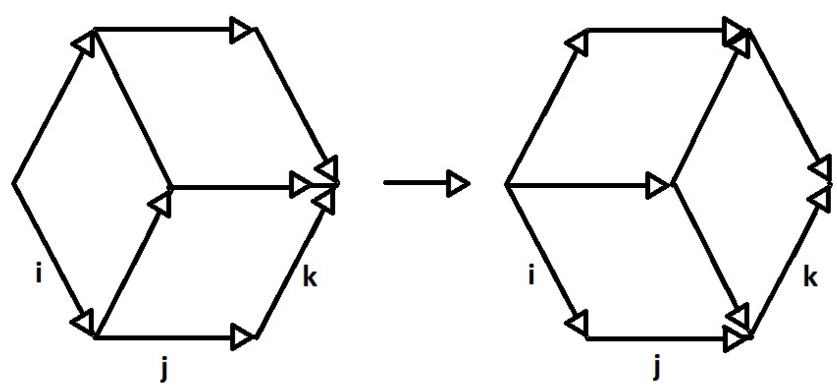
При проходе ρ через значение, соответствующее пересечению трех прямых $t = t_1, t_2, t_3, 1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq T$ формальное слово w меняется согласно правилу Б) $\sigma_t \sigma_{t+1} \sigma_t = \sigma_{t+1} \sigma_t \sigma_{t+1}$, а ромбический тайлинг, соответствующий разбиению, деформируется согласно операции **флипа**: замене вершины

$$\xi_{t_2} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3} \leftrightarrows \xi_{t_1} + \xi_{t_3} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3}$$

с необходимым условием присутствия 6 вершин-«соседей»:

$$\xi_{t_1} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3}, \xi_{t_3} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3}, \xi_{t_1} + \xi_{t_2} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3}, \xi_{t_2} + \xi_{t_3} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3},$$
$$\xi_{t_1} + \xi_{t_2} + \xi_{t_3} + \Xi_{-t_1 t_2 t_3}, \Xi_{-t_1 t_2 t_3},$$

где $\Xi_{-t_1 t_2 t_3}$ – сумма некоторых $\xi_t, 1 \leq t \leq T, t \neq t_1, t_2, t_3$.



Деформации разбиений и флипы ромбических тайлингов

Обозначим $di_T \in S_T$: $di(t) = T + 1 - t$ $(1, \dots, T)$ – «антитождественную» перестановку, $id_T \in S_T$: $id(t) = t$ $(1, \dots, T)$ – тождественную перестановку

Теорема (Леклерк Б., Зелевинский А.В.)

Любые два полных $\left(\pi(0+0) = id_T, \pi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = di_T\right)$ ромбических тайлинга можно перевести друг в друга путем последовательного применения конечного числа операций флипа

Дополнения

- Теорема верна для ромбических тайлингов с одинаковыми верхней $\pi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$ и нижней $\pi(0+0) = id_T$ границей.
- Не любой ромбический тайлинг с фиксированной верхней $\pi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$ и нижней $\pi(0+0) = id_T$ границей можно получить при заданных параметрах $p_0^t, \hat{p}_1^t(\rho), \hat{p}_2^t(\rho), t = 1, \dots, T$ при изменениях ρ.
  - существуют $p_0^t, \hat{p}_1^t(\rho), \hat{p}_2^t(\rho), t = 1, \dots, T$ и $y^t, t = 1, \dots, T$, удовлетворяющий необходимому условию предложения 7 и не удовлетворяющий достаточному условию предложения 7 ни при каком ρ .

Алгоритм исследования проблемы моментов (7) на статистических данных

Предложение 8. Три прямых семейства

$$(9)\ p_0^t = \hat{p}_1^t(\rho) z_1 + \hat{p}_2^t(\rho) z_2, t = t_1, t_2, t_3, 1 \le t_1 < t_2 < t_3 \le T$$

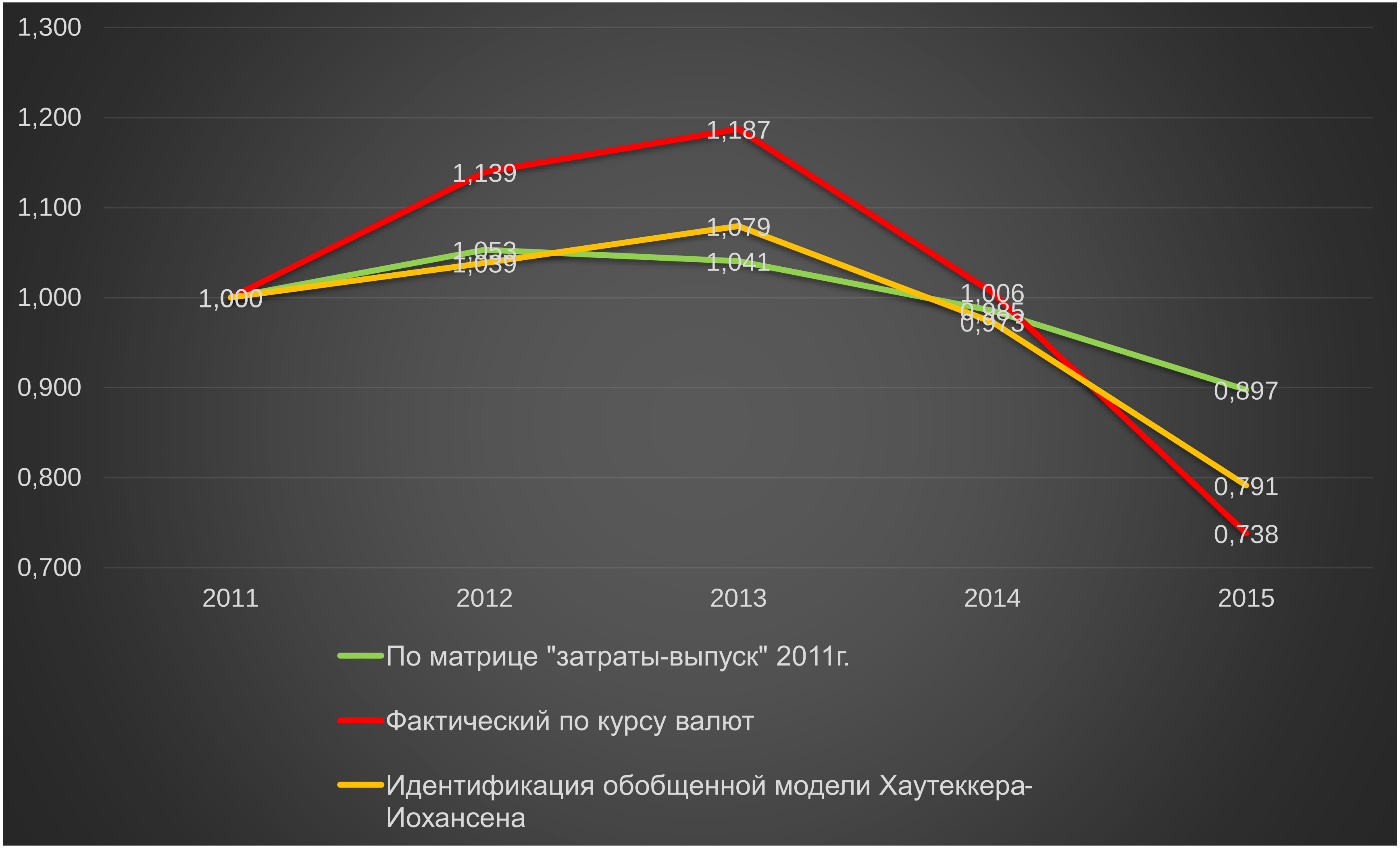
пересекаются в одной точке не более, чем при одном значении $\rho \in [-1,0) \cup (0, +\infty)$

Следствие: для решения проблемы моментов (7) необходимо:

1. Найти $\rho \in [-1,0) \cup (0, +\infty)$, соответствующие пересечению троек прямых (9), упорядочить найденные $\rho \in [-1,0) \cup (0, +\infty)$ по возрастанию: $(-1 \coloneqq \rho_0) < \rho_1 < \cdots < \rho_{k-1} < (0 \coloneqq \rho_k) < \rho_{k+1} < \cdots < (+\infty \coloneqq \rho_K)$
2. Для каждого промежутка $(\rho_i, \rho_{i+1}), 0 \le i \le K-1$:
    1. Расположить углы, соответствующие пересечению пар прямых (8) по возрастанию: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{|\Lambda|-T-1} < \frac{\pi}{2}$.
    2. По информации 2.1 вычислить множество спектров $B\left((\mathrm{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathrm{p}^\mathrm{T}, p_0^\mathrm{T})\right)$
    3. Решить задачу линейного программирования $y \in ?\, B\left((\mathrm{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathrm{p}^\mathrm{T}, p_0^\mathrm{T})\right)$

Замечание. Предложенный алгоритм полиномиален по T

Спрос обрабатывающих отраслей на импортные производственные факторы



Группировка отраслей

– I экспортно-ориентированные отрасли (нефтегазовая, металлургия и т.п.)
– II «эффективные» инфраструктурные отрасли (электроэнергетика, транспорт, связь и т.п.)
– III отрасли обрабатывающей промышленности, конкурирующие с импортом (машиностроение и т.п.)
– IV «неэффективные» отрасли сферы услуг (ЖКХ и т.п.)

Межотраслевой баланс 2011-2015гг.

2011	1	2	3	4
1	0,283	0,071	0,087	0,009
2	0,125	0,227	0,074	0,101
3-о	0,035	0,053	0,268	0,029
3-и	0,011	0,022	0,072	0,020
4	0,088	0,139	0,142	0,164

2011	1	2	3	4
1	0,307	0,076	0,093	0,007
2	0,126	0,245	0,071	0,108
3	0,040	0,087	0,411	0,045
4	0,087	0,148	0,149	0,183

2012	1	2	3	4
1	0,290	0,076	0,087	0,008
2	0,116	0,227	0,065	0,103
3	0,041	0,086	0,393	0,041
4	0,083	0,135	0,129	0,172

2013	1	2	3	4
1	0,303	0,080	0,090	0,008
2	0,113	0,228	0,063	0,105
3	0,040	0,087	0,401	0,043
4	0,076	0,136	0,121	0,179

2014	1	2	3	4
1	0,306	0,082	0,083	0,008
2	0,108	0,228	0,061	0,101
3	0,042	0,088	0,399	0,043
4	0,075	0,137	0,121	0,187

2015	1	2	3	4
1	0,304	0,085	0,085	0,008
2	0,104	0,225	0,058	0,103
3	0,038	0,093	0,404	0,044
4	0,073	0,142	0,125	0,197

Анализ российской статистики

- **Исходные данные:**
  $\{\mathbf{p}^t, p_0^t, y^t | t = 1, \dots T\}$, где $\mathbf{p}^t = (p_1^t, p_2^t)$ – вектор цен на производственные факторы, p_0^t – цена на выпускаемую продукцию, y^t – объём произведённой продукции в период времени t:
  – Статистические данные: $\{p_0^t, y^t | t = 1, \dots T\}$
    - доступны в статистике Росстата
  – Статистические данные: $\{p_1^t, p_2^t | t = 1, \dots T\}$
    - Рассчитываются, исходя из динамики курсов валют и цен с использованием матрицы «затраты-выпуск» за 2003 и 2011гг.

Идентификация обобщенной модели Хаутеккера-Иохансена

Отрасль	ρ
Продукция и услуги сельского хозяйства и охоты	-0,451
Продукция лесоводства, лесозаготовок и связанные с этим услуги	-0,760
Рыба и прочая продукция рыболовства и рыбоводства; услуги, связанные с рыболовством и рыбоводством	-0,872
Продукты пищевые и напитки, табак	-0,956
Текстиль, одежда, меха, кожа и изделия из кожи	-0,764
Древесина и изделия из дерева; Целлюлоза, бумага и изделия из бумаги; Продукция печатная	-0,827
Вещества химические, продукты химические и волокна химические; Изделия резиновые и полимерные	-0,728
Металлы	-0,834
Готовые металлические изделия, кроме машин и оборудования	-0,926
Машины и оборудование, не включенные в другие группировки (кроме оружия и боеприпасов)	-0,787
Электрические машины и электрооборудование; компоненты электронные, аппаратура для радио, телевидения и связи	-0,613
Изделия медицинские; приборы и инструменты для измерения, контроля, испытаний, навигации, управления; приборы оптические, кино- фотооборудование; и аппаратура, часы	-0,571
Автотранспортные средства, прицепы и полуприцепы; прочие транспортные средства	-0,891

Литература

1. Houthakker H.S. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis. // Rev. Econ. Studies, 1955-56, v. 23 (1), №60, p.27-31.
2. Johansen L. Production functions. Amsterdam-London: North Holland Co., 1972.
3. Cornwall R. A note on using profit functions. – Internat. Econ. Rev., 1973, v.14, №2, p.211-214.
4. Hildenbrand W. Short-run production functions based on micro-data. //Econometrica, 1981, v.49, №5, p.1095-1125.
5. Шананин А.А. Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1984, т.24, №12, с.1799-1811.

Литература

6. Шананин А.А. Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем. // ЖВМ и МФ, 1985, т.25, №1, с.53-65.

7. Henkin G.M., Shananin A.A. Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions. // Translation of mathematical monographs, 1990, v.81, p.189-223.

8. Henkin G.M., Shananin A.A. C^n – capacity and multidimensional moment problem. // Proceedings Symposium on Value Theory in Several Complex Variables, ed. by W.Stoll, Notre Dame Mathematical Lectures, 1990, №12, p.69-85.

9. Henkin G.M., Shananin A.A. The Bernstein theorems for Fantappie indcatrix and their applications to mathematical economics. // Lecture notes in pure and applied mathematics, 1991, v. 132, p.221-227.

Литература

10. Шананин А.А. Обобщённая модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, т.9, №9, с. 117-127.

11. Шананин А.А. Исследование обобщённой модели чистой отрасли производства.//Математическое моделирование,1997,т.9,№10, с.73-82.

12. Шананин А.А. Непараметрический метод анализа технологической структуры производства. // Математическое моделирование, 1999, т.11, №9, с.116-122.

13. Карзанов А.В., Шананин А.А. О стабильных соответствиях конечных множеств евклидова пространства и их приложениях. // Экономика и математические методы, 2005, т.41, №2, с.111-112.

14. Молчанов Е.Г. О модификациях ромбических тайлингов, возникающих в обратной задаче распределения ресурсов. // Труды МФТИ, 2913, т.5, №3, с.67-74.

Литература

15. *Молчанов Е.Г.* О комбинаторных свойствах класса многогранных конусов, возникающих в обратной задаче о распределении ресурсов // Труды МФТИ, 2013, т.5, №3, с.67-74.

16. *Агальцов А.Д.* Теоремы характеризации для обобщённого преобразования Радона // Функциональный анализ и его приложения, 2015, т. 49, №3, с.57-60.

17. *Agaltsov A.D., Molchanov E.G., Shananin A.A.* Inverse Problems in Models of Resource Distribution // Journal of Geometric Analysis, 2018, Volume 28, Issue 1, pp 726–765.

Спасибо за внимание!

Пример 3

Пусть $m = 2, n = 2, q\left(p_1, p_2\right) = p_1^{\nu} p_2^{1-\nu}, \textit{где}\, 0 < \nu < 1,$

$$\mu_j\left(dx\right) = x_1^{\alpha_1^j - 1} x_2^{\alpha_2^j - 1}, \alpha_i^j > 1\left(i, j = 1, 2\right).$$

Тогда $\Pi_j\left(s, p_j\right) = A_j \dfrac{p_j^{\alpha_1^j + \alpha_2^j + 1}}{s_1^{\alpha_1^j} s_2^{\alpha_2^j}},\ A_j > 0, \left(j = 1, 2\right),$

$$\Pi^A\left(s, p_0\right) = B \frac{p_0^{\alpha_1^A + \alpha_2^A + 1}}{s_1^{\alpha_1^A} s_2^{\alpha_2^A}}, B > 0,$$

где $\alpha_j^A = \dfrac{\nu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1\right)\alpha_j^1 + \left(1 - \nu\right)\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + 1\right)\alpha_j^2}{\nu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1\right) + \left(1 - \nu\right)\left(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + 1\right)}, \left(j = 1, 2\right).$

Всегда существует $\mu^A\left(dx\right) = b x_1^{\alpha_1^A} x_2^{\alpha_2^A}, \textit{где}\ b > 0.$

Формирование цены на отечественный производственный фактор

Цена на импортный производственный фактор $\{p_1^t | t = 1, \dots T\}$

$$p_1^t = \sum_{j \in P} \alpha_j p_j^t, t = 1, \dots, T$$

где P – отрасли, α_j - коэффициенты столбца симметрической матрицы «затраты» - «выпуск», соответствующие отрасли, исследуемой на замещаемость.

Симметрическая матрица «затраты» - «выпуск» доступна для 2003 и 2011 гг.

Будем считать, что испытывать замещение с импортными производственными факторами будут только отечественные производственные факторы, соответствующие обрабатывающим отраслям P_3 (III отрасль в 4-отраслевой модели)

$$p_1^t = \sum_{j \in P_3} \alpha_j p_j^t + \sum_{j \in P \setminus P_3} \alpha_j p_j^t, t = 1, \dots, T$$

Тогда кривые $p_0^t = \left((p_1^t x_1)^{-\rho} + (p_2^t x_2)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$ будут иметь вид:

$$(10)\ \ p_0^t - \sum_{j \in P \setminus P_3} \alpha_j p_j^t = \left(\left(\left(\sum_{j \in P_3} \alpha_j p_j^t\right) x_1\right)^{-\rho} + (p_2^t x_2)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

Необходимость регуляризации российской статистики

Необходимое условие предложения 7.

Пусть порядок $\lambda = \big(\lambda(1), \dots, \lambda(T)\big) \in S_T$ такой, что $y\big(\lambda(j)\big) > y\big(\lambda(j+1)\big)$, $j = 1, \dots, T-1$. Если змейка, соответствующая порядку λ выходит за пределы ромбического тайлинга, построенного по разбиению Λ, то проблема моментов (7) не разрешима.

Следствие необходимого условия предложения 7.

Пусть для $1 \le t_1, t_2 \le T$ верно:

$$\left\{p_0^{t_1} - \left(p_1^{t_1}x_1 + p_2^{t_1}x_2\right)\right\} \cap intR_+^2 \subset \left\{p_0^{t_2} - \left(p_1^{t_2}x_1 + p_2^{t_2}x_2\right)\right\} \cap intR_+^2$$

Для разрешимости проблемы моментов (7) хотя бы при одном ρ необходимо, чтобы $y^{t_1} \le y^{t_2}$

- Несовершенство статистики приводит к нарушению необходимого условия предложения 7 в при многих $1 \le t_1, t_2 \le T$

Регуляризация российской статистики

- Часть алгоритма исследования проблемы моментов (7) на статистических данных :

Решить задачу линейного программирования $y \in ?\, B\left((\mathbf{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathbf{p}^{\mathrm{T}}, p_0^{\mathrm{T}})\right)$

- Модификация «задание погрешности индекса выпусков $\{y^t, | t = 1, \dots T\}$»:

Решить задачу линейного программирования:

$$\exists ?\, \mathbf{y}' \colon y'^t \in [(1-\epsilon)y^t, (1+\epsilon)y^t], t = 1, \dots, T$$
$$\mathbf{y}' \in B\left((\mathbf{p}^1, p_0^1), \dots, (\mathbf{p}^{\mathrm{T}}, p_0^{\mathrm{T}})\right)$$

  - В алгоритме заменяется задача линейного программирования: сложность алгоритма не изменится
  - Данная модификация экономически нецелесообразна: данные индексов выпусков – первичные статистические данные, их погрешность на порядок меньше погрешности $\{\mathbf{p}^t, p_0^t \,| t = 1, \dots T\}$
- Экономически целесообразные модификации индексов цен $\{\mathbf{p}^t, p_0^t \,| t = 1, \dots T\}$:
  - Посезонная обработка статистики вместо поквартальной
  - Исключение 2008-2011гг. из расчета (мировой экономический кризис)
  - Введение временного сдвига реализации продукции
- Модификация «задание погрешности индексов цен $\{\mathbf{p}^t, p_0^t \,| t = 1, \dots T\}$»
  - дополнительно включаем в Λ области, которые могут появиться при изменении $\{\mathbf{p}^t, p_0^t \,| t = 1, \dots T\}$ в пределах погрешности