Равновесие в играх с информационными связями между участниками

30 апреля 2019

Аннотация

Равновесие по Нэшу — центральное понятие теории игр. Чтобы прийти к такому равновесию участники должны иметь адекватное представление о стратегиях других игроков, что выполняется далеко не всегда. В докладе, основанном на статье E.Lipnowski и E.Sadler (Econometrica, vol.87, no.2 (March 2019), 567–591), рассматривается граф связей между участниками, представляемыми вершинами, причём соседи полностью осведомлены о стратегиях друг друга, а остальные могут только строить гипотезы. Вводится понятие равновесия в игре с графом, причём оказывается, что чем больше рёбер, тем меньше множество равновесий; полному графу отвечает множество равновесий по Нэшу. Упор делается не на теорию, а на примеры, иллюстрирующие роль структуры графа, например, наличия игроков, соседствующих со всеми остальными. Примеры включают координацию между инвесторами, следование за лидером, частные инвестирования в общественные блага и даже организацию государственных переворотов.

Равновесия в играх с одновременными ходами и связями между участниками

Множество участников N, S_i — множество стратегий, а u_i — функция выигрыша игрока $i \in N$. Связи между участниками задаются неориентированным графом G: $ij \in G$, если i и j связаны; G_i — множество игроков, с которыми связан i. Граф G позволяет игрокам выдвигать правильные гипотезы о поведении своих соседей и ограничить множество допустимых стратегических профилей из $S = \prod_{i \in N} S_i$. Каждый игрок $i \in N$ имеет соображения (**гипотезу**) относительно поведения других игроков, а именно вероятностное распределение $\mu_i \in \Delta(S_{-i})$, где $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$. Стратегия $s_i^* \in S_i$ является **лучшим ответом** при гипотезе μ_i, если $s_i^* \in \operatorname{argmax}_{s_i \in S_i} \int_{S_{-i}} u_i(s_i, \cdot) d\mu_i$. Множество рациональных стратегий игрока i, имеющего представление μ_i о стратегиях других игроков, совпадает с множеством лучших ответов $r_i(\mu_i) \subseteq S_i$.

Граф G накладывает ограничения на гипотезы игроков. Для профиля стратегий $\sigma \in S$ и игрока $i \in N$ определим множество **стратегий, совместимых со стратегической информацией i в σ**: $S_{-i}^{\sigma,G} = \{s_{-i} \in S_{-i} \mid s_j = \sigma_j \ \forall j \in G_i\}$. Аналогично, для $\sigma \in \Sigma \subseteq S$, положим $\Sigma_{-i}^{\sigma,G} = S_{-i}^{\sigma,G} \cap \{s_{-i} \in S_{-i} \mid (\sigma_i, s_{-i}) \in \Sigma\}$.
Если игрок i уверен, что истинный стратегический профиль σ содержится в Σ, то в своей гипотезе μ_i он может приписать положительную вероятность только профилям из $\Sigma_{-i}^{\sigma,G}$.
Для каждого $i \in N$, каждого измеримого $\Sigma \subseteq S$ и каждого $\sigma \in \Sigma$ определим множество **жизнеспособных гипотез игрока i по отношению к Σ и σ**, приписывающих вероятность 1 стратегическим профилям из Σ, в которых соседи i используют стратегию σ:
$\Delta_i^{\sigma,G}(\Sigma) = \{\mu_i \in \Delta(S_i) \mid \mu_i(\Sigma_{-i}^{\sigma,G}) = 1\}$. Множество **лучших ответов на Σ, совместимых с графом G**, состоит из стратегических профилей, в которых каждый игрок наилучшим образом отвечает на гипотезы, в которых все используют стратегии из Σ, а соседи руководствуются стратегией σ:
$B_G(\Sigma) = \{\sigma \in \Sigma \mid \forall i \in N \ \exists \mu_i \in \Delta_i^{\sigma,G}(\Sigma), \ \sigma_i \in r_i(\mu_i)\}$.

Определение

Стратегический профиль σ называется ***(рационализуемым) сетевым равновесием****, если он содержится в измеримом множестве $\Sigma \subseteq S$, для которого $\Sigma = B_G(\Sigma)$. Множество таких равновесий обозначается R_G.*

В сетевом равновесии каждый участник наилучшим образом отвечает на гипотезу, правильно отражающую стратегии его соседей и совместимую с равновесными стратегиями остальных игроков. Заметим, что отображение B_G монотонно по отношению вложения множеств: при уменьшении Σ уменьшается множество жизнеспособных гипотез, а следовательно и множество лучших ответов. В хороших ситуациях это позволяет итеративно вычислять R_G. Например, если S_i компактны, а u_i непрерывны, то $R_G = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_G^k(S)$.

По мере обогащения графа G рёбрами, множества гипотез, лучших ответов и сетевых равновесий сокращаются.

Предложение (очевидное)

R_G обладает следующими свойствами:

(а) *Если граф G не имеет рёбер, то R_G — множество рационализуемых стратегических профилей.*

(б) *Если граф G полон, то R_G — множество равновесий по Нэшу.*

(в) *Если $G \subseteq G'$, то $R_G \supseteq R_{G'}$.*

Между игроками бывают и другого типа связи. Будем говорить, что партнёр j **несуществен** для выигрышей i, если $u_i(\sigma_j, \sigma_{-j}) = u_i(s_j, \sigma_{-j})\ \forall \sigma \in S,\ s_j \in S_j$, в противном случае j **существенный** партнёр для i. Это понятие порождает граф $\tilde{G}$, в котором два игрока соединены ребром, если один из них существенен для выигрышей другого. У графов G и $\tilde{G}$ нередко бывает много общих рёбер.

Предложение

(a) *Если для всех j, существенных для i, $j \notin G_i$, то R_G — множество рационализуемых стратегических профилей.*

(б) *Если $j \in G_i$ для всех j, существенных для i, то R_G — множество равновесий по Нэшу.*

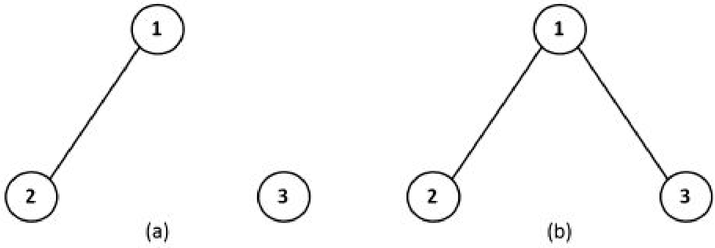
Таким образом, для обеспечения координации важны не все связи, а прежде всего существенные, то есть связи с "нужными" партнёрами. Можно было бы предположить, что в общей ситуации граф G порождает то же множество равновесий, что и граф $G \cap \tilde{G}$, но это не так, как показывает пример *"следуй за лидером"*.

Вытеснение (crowding out) инвестиций

Три игрока одновременно принимают решение, инвестировать или нет в некоторый проект. Инвестор (участник, делающий ход I) несёт расходы c, $\frac{1}{2} < c < 1$. При наличии инвестиций образуется единичный доход (не зависящий от числа инвесторов), который поровну делится между инвесторами. Выигрыш игроков, воздержавшихся от инвестирования (делающих ход N) равен нулю. Имеется три равновесия по Нэшу: (I, N, N), (N, I, N) и (N, N, I). Всего же имеется восемь стратегических профилей, и все они рационализуемы (всё зависит от гипотез участников относительно стратегий друг друга).

В случае графа (а) остаётся только шесть допустимых стратегических профилей, а именно (I, N, N), (I, N, I), (N, I, N), (N, I, I), (N, N, I) и (N, N, N).

В случае графа (b), получающегося из графа (a) добавлением связи между игроками 1 и 3, остаётся только четыре допустимых профиля: (I, N, N), (N, I, N), (N, N, I) и (N, I, I), так что координация нарушается только в последнем случае (между игроками 2 и 3). В этой ситуации первый игрок имеет преимущество, ибо ему гарантирован неотрицательный выигрыш. Более того, в отличие от предыдущих случаев, кто-то обязательно инвестирует!



Следуй за лидером

Три игрока выбирают между действием 0 и действием 1, причём игроку 1 безразлично, что выбрать, а игроки 2 и 3 получают положительный выигрыш если и только если их действие совпадает с действием лидера (игрока 1). В равновесии Нэша все игроки выбирают одинаковое действие; всякий профиль рационализуем. Предположим, что игрок 2 связан с обоими остальными, а игроки 1 и 3 не связаны между собой. Тем не менее, игрок 3 может восстановить действие игрока 1 по действию игрока 2, что, несмотря на недостающее звено, позволяет добиться равновесия по Нэшу. Игроки 2 и 3 несущественны для выигрышей друг друга; тем не менее, если удалить их связь, то множество равновесных стратегических профилей строго возрастёт. Дело в том, что здесь 3 связан с 1 через посредство 2.

Особую роль играют игроки, связанные со всеми остальными, которые, как в примере “следуй за лидером”, могут иногда передавать достаточно стратегической информации, чтобы обеспечить равновесие по Нэшу. Но это не всегда так.

Обеспечение общественными благами

Имеется N игроков, i-ый из которых выбирает размер инвестиции $x_i \in [0, 1]$. Выигрыш i-го игрока $u_i(x) = 2\sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j} - x_i$, а его маргинальная полезность равна $\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j}}$. Поэтому распределение x является равновесием по Нэшу если и только если $\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$. Игрок i может рационализировать любой уровень инвестиций x_i, если он ожидает, что инвестиции остальных участников удовлетворяют условию $\sum_{j \neq i} x_j = 1 - x_i$. Поэтому совокупные инвестиции в рационализуемом стратегическом профиле могут составить любую сумму из интервала $[0, N]$. Исследуем, как меняется интервал допустимых совокупных инвестиций в зависимости от структуры графа G. Оказывается, что верхняя граница зависит от максимального независимого множества игроков, а нижняя граница зависит от наличия игроков, связанных со всеми остальными.

Определение

*Подмножество игроков M называется **независимым**, если никакие два игрока из M не соединены ребром, т.е. $j \notin G_i \; \forall i, j \in M$. M — **наибольшее** независимое подмножество, если не существует независимого подмножества M' с $\operatorname{card} M' > \operatorname{card} M$.*

Предложение

Пусть в игре с обеспечением общественными благами M — наибольшее независимое подмножество игроков в G. Тогда

(а) *Максимальные совокупные инвестиции в сетевых равновесиях составляют $\operatorname{card} M$.*

(б) *Если существует игрок, связанный со всеми остальными, то минимальные совокупные инвестиции в любом сетевом равновесии составляют 1, а в противном случае 0.*

Доказательство.

1) Стратегический профиль $x \in [0,1]^N$ является сетевым равновесием, если и только если выполнены следующие условия:

- $x_i \leq 1 - \sum_{j \in G_i} x_j$, если $x_i > 0$;
- $\sum_{j \in N} x_j \geq 1$, если существует игрок i, связанный со всеми остальными.

2) Любой уровень совокупных инвестиций в сетевом равновесии может быть достигнут, когда никакие два связанных игрока не инвестируют одновременно. Действительно, если и игрок i, и его сосед вносят положительные инвестиции, то рассмотрим модифицированный профиль x', положив

$$x'_j = \begin{cases} x_i + \sum_{k \in G_i}, & j = i, \\ 0, & j \in G_i, \\ x_j & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Предложения немедленно вытекает из 1) и 2). $\square$

Таким образом, если участник, связанный со всеми остальными, что-то инвестирует, то он даёт сигнал, в результате которого достигается равновесие Нэша, а если не инвестирует (оказывается халявщиком), то совокупные инвестиции могут оказаться неоправданно большими. В этом случае периферийные игроки могут ошибочно полагать, что именно они ответственны за инвестиции.
Можно также исследовать сетевое равновесие в других вариантах игр с общественными благами. Так, можно рассмотреть "полезность лучшего донора" $u_i(x) = 2\sqrt{\max_{j \in N} x_j} - x_i$ или "полезность минимального взноса" (слабейшего звена) $u_i(x) = 2\sqrt{\min_{j \in N} x_j} - x_i$.

В первом случае два соседа никогда оба не станут инвестировать (ибо тот, кто инвестирует меньше, предпочёл бы ничего не инвестировать), так что инвесторы образуют независимое подмножество и справедлива оценка из предыдущего случая. Аналогично, минимальные совокупные инвестиции равны нулю при отсутствии игроков, связанных со всеми остальными. Однако если игрок, связанный со всеми, не инвестирует, то это означает, что хотя бы один из партнёров инвестирует хотя бы $\frac{1}{4}$.

В случае слабейшего звена всё обстоит наоборот. Из симметрии следует, что игроки из одной связной компоненты графа G в сетевом равновесии выбирают один и тот же уровень инвестиций. Если граф связен, то мы получаем равновесие Нэша. Если связных компонент несколько, то уровень инвестиций на них может различаться.

Вечеринка в складчину

Каждый из N приносит на вечеринку одно из N блюд. У всех участников одинаковая функция полезности, монотонно возрастающая в зависимости от количества различных блюд. Равновесие Нэша: все принесли разные блюда; все стратегические профили рационализуемы. Вопрос: каково минимальное количество различных блюд в сетевом равновесии (в зависимости от графа G)? Связанные игроки приносят разные блюда, поэтому вопрос сводится к раскраске графа. **Хроматическое число** графа — наименьшее количество красок, необходимых для такой раскраски, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разные цвета.

Предложение

Минимальное количество блюд в сетевом равновесии равно хроматическому числу G.

В этой игре роль участников, связанных со всеми остальными, меньше, чем в игре с общественными благами. В той игре, если такой участник инвестирует, то он даёт сигнал для равновесия Нэша. В игре же с вечеринкой такой участник почти не передаёт полезной информации другим, и для звёздного графа в равновесии может оказаться всего два блюда.

Политический протест и координация элит

Успех политического протеста зависит от совместных действий участников, которые могут как оказаться в выигрыше, так и проиграть. В модели рассматривается население размера N, причём каждый житель решает, принять ли ему участие в протесте, чтобы добиться изменения политического строя. Если в протестах принимают участие хотя бы $M \geq 2$ игроков, то происходит смена режима, а каждый протестующий получает выигрыш $y > 0$. Если же протестует менее M игроков, то мятежники арестовываются и каждый из них несёт потери $c > 0$. Те же, кто не участвует в протестах, ничего не выигрывают и не теряют. В этой игре все профили рационализуемы, и имеется два равновесия Нэша: все протестуют и никто не Протестует. Игрок, связанный со всеми остальными (центральный игрок), является координатором и позволяет достичь равновесия Нэша. Однако даже если таких "лидеров протеста" (политических партий) двое и они связаны, так что $G_i \cup G_j = N$, то они в сетевом равновесии должны действовать согласованно.

Предложение

(а) *Если* $\exists i \mid G_i = N$*, то в сетевом равновесии все участники действуют согласованно.*

(б) *Если* $G_i \cup G_j = N$*, то в сетевом равновесии* i *и* j *действуют согласованно.*

Доказательство.

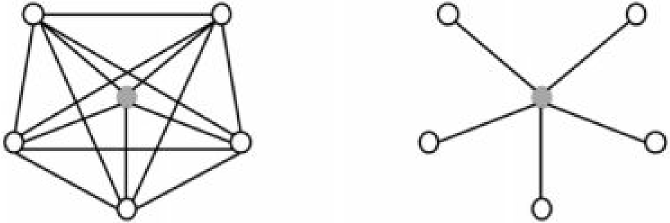
Ввиду монотонности, можно предположить, что у i и j нет общих соседей. Для профиля σ обозначим через $m_k(\sigma)$ количество соседей k, протестующих при σ. Доказательство от противного: предположим, что i протестует, а j нет. Положим

$$\begin{aligned}\underline{m}_i &= \min\{m_i(\sigma) \mid \sigma \in R_G,\ i \text{ протестует при } \sigma,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{а } j \text{ не протестует при } \sigma\},\\ \overline{m}_j &= \max\{m_i(\sigma) \mid \sigma \in R_G,\ i \text{ протестует при } \sigma,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{а } j \text{ не протестует при } \sigma\}.\end{aligned}$$

Поскольку $R_G \subset B_G(R_G)$, из выбора i-го игрока следует, что $\underline{m}_i + \overline{m}_j \geq M - 1$, а из выбора j-го, что $\overline{m}_j + \underline{m}_i < M - 1$. $\square$

Динамические игры (с историей) и передача информации о намерениях других участников

Как и в предыдущем разделе, имеется N участников, и если протестуют хотя бы M игроков, то каждый из них получает $y > 0$, а если меньше, то каждый несёт потери $c > 0$. Но теперь пусть один из участников является лидером и делает (наблюдаемый всеми) выбор раньше всех, после чего одновременно принимают решение все остальные. В случае полного графа имеется два сетевых равновесия: в одном из них протест успешен, а в другом протест отсутствует. Однако, если убрать часть рёбер, оставив звезду с центром в лидере, то количество сетевых равновесий *уменьшится*. Действительно, другие участники ставят себя на место лидера и думают, что если он протестует, то ожидает, что за ним последуют не менее $M - 1$ участников. Поэтому лучший ответ для остальных участников в этом случае — протестовать. Но лидер понимает это, и потому *всегда* протестует, вынуждая остальных поступить так же. Поэтому протест — это единственное сетевое равновесие в случае звёздного графа.



(a) (b)

Недостатки

- Каким образом соседи получают информацию о стратегиях друг друга? Уместно ли считать, что связи между игроками устанавливаются по принципу всё или ничего? Может быть, стоит учитывать силу связей, а определение связей должно учитывать наличие разных путей на графе? Всегда ли разумно считать граф неориентированным?
- Если уж соседи всё знают о стратегиях друг друга, то не естественно ли для них вступать в коалиции, перераспределять выигрыши и т.д.?
- Естественно ли считать, что всем игрокам известна структура графа?

Спасибо за внимание!

С ПРАЗДНИКОМ!