Немонотонная логика и теория рационального выбора

Данилов В.И.

1 Введение

Немонотонная логика изучает типы правдоподобных рассуждений, рассуждений, которые не являются строгими и бесспорными, но которые все же выглядят достаточно разумными и постоянно применяются обычными людьми. Пик развития – 70-80 года.

Логики любят работать с аксиомами и правилами вывода. Имеется много (примерно 20) таких правил. Вот некоторые: Рефлексивность, Левая логическая эквивалентность, Правое ослабление, Левое усиление, Отсечение (cut), Осторожная монотонность и т.п.). Отбирая те или иные правила, мы получаем ту или иную систему немонотонной логики. В работе KLM рассмотрены несколько (пять-шесть) таких систем, упорядоченных по силе. Самая слабая из них – так называемая кумулятивная, самая сильная – классическая (или монотонная) система; промежуточное положение занимает т.н. преференциальная система $\mathbf{P}$, наиболее интересная в каком-то смысле.

Помимо правил вывода, логики обращаются также к моделям, теоретико-множественным конструкциям, для которых выполняются данные правила вывода. Бесплотные логические конструкции обретают зримое и осязаемое воплощениме.

Мы предлагаем несколько иную типологию

систем немонотонных рассуждений. Главная идея, стоящая за немонотонными (необоснованными, оспариваемыми) рассуждениями, – это идея "нормальности". Люди обычно ориентируются на общий, нормальный случай, забывая (или даже не подозревая) исключения. Вот типичный пример. Любой человек обычно предполагает, что птицы летают, пренебрегая тем исключением, что пингвины или страусы не летают. Аналогично млекопитающие обычно не летают, но есть летучие мыши. Или – кошка, значит четыре лапы.

И хотя могут быть исключния, рассуждения, ориентированные на нормальные ситуации, имеют свою ценность и достойны изучения. Более того, все научные теории ориентируются на типичные случаи и могут изменяться при получении дополнительных фактов.

Немонотонные рассуждения также тесно связаны с задачей пересмотра убеждений и вер при получении дополнительной информации.

Эти соображения формализуются следующим способом. Пусть W представляет множество "миров" (или возможных состояний "Мира"). Каждое утверждение верно в некоторых мирах и неверно в других. И утверждение можно считать 'нормально истинным', если оно верно для 'нормальных' миров.

Более точно, пусть известно, что мы находимся в некотором подмножестве $X \subseteq W$ миров. Тогда мы делаем заключение (быть может основанное на незнании, оптимизме, или вероятности), что мы заходимся в более узком подмножестве $N(X) \subseteq X$ ‘нормальных’ миров.

Исходя из этой идеи, можно определить отношение ‘немонотонного следования’ $\mid\!\sim$ по правилу:

$A \mid\!\sim B$, если $N(A) \subseteq B$.

И затем изучать свойства такого гиперотношения в зависимости от свойств оператора N. Такие сжимающие операторы называют функциями выбора (ФВ); такие они достаточно интенсивно изучались в теории рационального выбора в экономике и социальных науках. Там функции выбора классифицировались с позиций "степени рациональности". И предложение состоит в том, чтобы типологию "немонотонных систем" строить на основе типологии функций выбора (тут надо отметить подход Айзермана и Малищевского [6], положивших в основу типологии три аксиомы **H,C,O**). Тем более, что существует замечательная двойственность между функциями выбора и расширяющими операторами [7], которая подсказывает "правильные" классы. Как мы увидим, получается вполне симпатичная типология, хотя чем-то и отличная от предложенной в [3]. Впрочем, полного совпадения ожидать и не стоило из общих соображений – классическая логика получается, когда "исключения не допустимы то есть когда $N(X) = X$. Такие функции выбора соотвествуют полному безразличию и не очень интересны с точки зрения рационального выбора. Напротив, "наиболее рациональный" выбор там соотвествует максимизации некоторого критерия $u : W \to \mathbb{R}$.

В итоге классификация немонотонных логик в терминах соотвествующих функций выбора выглядит так. Самые общие логики (или отношения следования) соотвествуют самым общим функциям выбора. Первый интересный класс соотвествует т.н. наследственным функциям выбора, то есть удовлетворяющим аксиоме **H**). Они двойственны монотонным расширяющим операторам. Далее идут (несравнимые друг с другом) два класса, отвечающие аддитивным операторм и операторам замыкания. Мы описываем и двойственные к ним функции выбора. Важный подкласс замкнутых составляют выпуклые геометрии (дуальные к функциям выбора Плотта), соответствующие знаменитой системе **P** немонотонных рассуждений. Наконец, обсуждаются так называемые дополнительные ФВ и соответствующие им гиперотношения. Они тожесвязаны с операторами зщамыкания, но уже с помощью другой, тривиальной двоственности.

2 Немонотонная логика и функции выбора

Итак, мы обозначаем W некоторое множество и будем интересоваться гиперотношениями (обозначая их $|\sim$) на W. Множестиво W интерпретируется как множество возможных миров или состояний одного мира. Подмножество A в W понимаются как "знание" (или информация) о состоянии мира, в котором находится лицо, принимающее решения. Однако наш ЛПР отчасти волюнтаристски (на основании своих предрассудков, опыта, дополнительного знания или веры) сужает это множество A (дополняет свое "знание") до подмножества "нормальных" состояний (нормальные в смысле НОРМА, то есть не паталогия, не исключения) $N(A)$ и делает заключения как будто мир находится в состоянии $N(A)$.

Замечание. В логике (см., в частности, [3]) обычно начинают с языка и высказываний о "мире" или его состоянии, которые можно строить с помощью логических связок. Каждое высказывание (формула) задает подмножество в W, подмножество тех состояний, в которых данное высказывание истинно. Мы будем пропускать этот предварительный этап, работая сразу с подмножествами в W. Нюанс: при формульном пожходе не любое подмножество является "допустимым"; в конце концов формул лишь счетное число. Мы будем игнорировать этот нюанс, полагая, что далее под подмножествами понимаются только допустимые.

Обозначим через $|\!\sim = |\!\sim_N$ гиперотношение немонотонного следования, заданное нехитрой формулой:

$$A|\!\sim B, \text{ если } B \subseteq N(A).$$

Это отношение $|\!\sim_N$ обладает тремя очевидными свойствами (аксиомами, правилами вывода) из науки логики.

1. Рефлексивность: $A|\!\sim A$.

2. Правое ослабление: если $A|\!\sim B$ и $B \subseteq C$, то $A|\!\sim C$.

3. Правило ***И*** (или, точнее, ***И***$_\infty$): если $A|\!\sim C_i$ для некоторого семейства $(C_i, i \in I)$, то $A|\!\sim \cap_i C_i$.

Для краткости будем называть эти условия *базисными*. Очевидно, что каждое базисное гиперотношение $|\!\sim$ именет вид $|\!\sim_N$ для некоторой функции выбора N. Для этого надо положить $N(A)$ равным пересечению всех C, таких что $A|\sim C$. В дальненйшем мы будем интересоваться только базисными гиперотношениями, называя их просто гиперотношениями, или гиперотношениями следования.

Справедливости ради надо сказать, что условие $\mathbf{И}_\infty$ не выглядит слишком очевидным. Да, для конечных семейств такое условие встречается почти всюду в этой литературе, но распространение на бесконечные – это уже некий произвол. Хотя в работе Марти и Пиносио [4] он принят; поэтому они и называют свою систему $\mathbf{P}$ (о которой речь впереди) не $\mathbf{P}$, а $\mathbf{P}_\infty$. Не будем в этом месте спорить; эта аксиома удобна, и мы воспринимаем ее как чисто техническую.

В теории выбора часто предполагают выполненой условие об отсутствии дамми (пустышек, фиктивных элементов). Элемент $x \in W$ называется *дамми* (относительно ФВ N), если $N(x) := N(\{x\}) = \emptyset$. В теории выбора это условие часто принимается, но столь же части не накладывается. Более сильным является условие *непустозначности*, которое говорит, что $N(A) = \emptyset$ только при пустом A. В немонотонной логике это условие выглядит даже более уместным. Дело в том, что утверждение $A| \sim \emptyset$ (или $N(A) = \emptyset$) означает, что нормальных состояний в A просто нет, все сплошные исключения, то есть что информация об A просто ложная, что возможны любые заключения. Это очень коррелирует с тем, что из неверного утверждения следует все что угодно. Таким образом, хотя условие отсутствие дамми мы не предполагаем, при необходимости мы его будем привлекать без особых оправданий.

Итак, базисные гиперотношения немонотонного следования – это фактически функции выбора (ФВ). При работе с функциями выбора часто удобно привлекать двойственность между ними и расширяющими операторами, двойственность, введенную и изученную в работе [7]. Она возникла как обобщение двойственности, обнаруженной Кошевым [5] между функциями Плотта (о чем речь впереди) и выпуклыми геометриями. Эта двойственность состоит в том, что

(1) для функции выбора N (то есть по сжимающему оператору) можно определить расширяющий оператор E по правилу:

$$x \in E(A) \text{ тогда и только тогда, когда } x \text{ не принадлежит } N(A \cup x).$$

(2) и обратно, для каждого расширяющего оператора E можно определить функцию выбора N по правилу

$$x \in N(A) \text{ тогда и только тогда, когда } x \text{ не принадлежит } E(A - x).$$

Ясно, что эти сопоставления задают антимонотонную биекцию ("двойственность") между множествами функций выбора на W и множеством расширяющих операторов. Надо сказать, что расширяющие операторы – вещь более привычная для математиков (замыкания в топологии, следствия из аксиом в формальной математике и т.п.), и было придумано много свойств для таких операторов. Наложение дополнительных свойств и приводит к разным классам расширяющих и сужающих операторов, а тем самым – классам гиперотношений следования.

Далее мы будем параллельно работать с 'троицей', состоящей из ФВ N, гиперотношения $|\!\sim_N$ и расширяющего оператора E, называя их *соответствующими* друг другу. Дело в том, что условия и свойства иногда выглядят более гладко или привычно для одного члена троицы и менее привычно для другого.

В заключение скажем о двух (близких) операциях, которые позволяют строить одни ФВ из других. Первая – объединение. Пусть N и M – две ФВ на W; тогда можно образовать ФВ $N \cup M$ по простому правилу:

$$(N \cup M)(A) = N(A) \cup M(A).$$

И аналогично для произвольного числа слагаемых. Мы упоминаем эту операцию потому, что все классы, которые мы рассмотрим далее, замкнуты относительно операции объединения.

Другая важная операция – операция прямого образа. Пусть дано отображение множеств $f : V \to W$ и ФВ M на V. Тогда можно определить ФВ $f_*(M)$ на W (*прямой образ* при отображении f) по правилу: для $A \subseteq W$

$$f_*(M)(A) = f(M(f^{-1}(A))).$$

Польза этой операции (достаточно популярной как в теории выбора, см. [7], так и в немонотонной логике, см. [3, 4]) в том, что ФВ M может быть устроена более просто. Фактически мы "расщепляем" каждое состояние w на множество $f^{-1}(w)$ "более тонких суперсостояний"; за счет этого часто удается обойтись более простыми ФВ. Кстати, для расширяющего оператора F прямой образ надо определять следующей формулой:

$$f_*(F)(A) = f_!(F(f^{-1}(A))),$$

где $f_!$ обозначает *полный образ* множества при отображении f, то есть для $B \subseteq V$ $f_!(B) = \{a \in W,\ f^{-1}(a) \subseteq B\}$. При таком понимании прямой образ согласуется с соответствием, то есть если ФВ M и расширяющий оператор F соответствуют друг другу, то соответствуют друг другу и их прямые образы.

3 Монотонные операторы и наследственные ФВ

Первое напрашивающееся свойство расширяющего оператора – его монотонность. Скажем, что оператор E *монотонный*, если $A \subseteq B$ влечет $E(A) \subseteq E(B)$. При дуализации это свойство превращается в свойство наследования ФВ.

Определение. ФВ N называется *наследственной*, если для нее выполнено следующее свойство **H**:

$$\text{если } A \subseteq B, \text{ то } N(B) \cap A \subseteq N(A).$$

Иначе говоря, если элемент a из A принадлежит $N(B)$, то он принадлежит $N(A)$. Или, если a выбирается в большем множество, то он выбирается и в меньшем. То есть "хорошесть" a не теряется при уменьшении меню. С позиции рационального выбора это очень разумное требование. Хотя и не бесспорное. Представим, что a выбирался потому, что он был хорош в паре с некоторым другим b. И если b недоступен, то и нужда в a исчезает. В разделе 7 мы более подробно обсудим принцип "дополнительности" при формирования ФВ.

Легко показать, что свойство наследственноти ФВ N в точности двойственно свойству монотонности соотвествующего расширяющего оператора E (Предл. 1 из [7]). Прежде чем переходить к соответствующим гиперотношениям, полезно привести эквивалентные формулировки наследственности.

Лемма 1. *Следующие условия на ФВ N эквивалентны:*

1) *N наследственная,*

2) $N(A) \cap B \subseteq N(A \cap B)$ *для любых* A и B,

3) $N(A \cup B) \subseteq N(A) \cup N(B)$ *для любых* A и B,

4) *для любого семейства* $(A_i, i \in I)$ *подмножеств в* W *выполнено включение* $N(\cup_i A_i) \subseteq \cup_i N(A_i)$.

Формулировки 1) и 2) выглядят как-то несимметрично, в отличие от 3) и 4), которые можно понимать как субаддитивгность N. Доказательства эквивалентности несложные, и мы ограничимся только импликацией 1) $\Rightarrow$ 4). Пусть $x \in N(\cup_i A_i)$. Так как x принадлежит некоторому A_i, то из наследования мы заключаем, что $x \in N(A_i)$.

Предложение 1. *Гиперотношение* $|\sim$ *соответствует наследственной ФВ* N *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию* **ИЛИ**.

Напомним, что условие **ИЛИ** означает следующее:

$$\text{если } A|\sim C \text{ и } B|\sim C, \text{ то } A \cap B|\sim C.$$

Это условие (или аксиома, или правило вывода) не представляется бесспорным в теории немонотонного вывода и появляется в таксономии [3] только при рассмотрении достаточно сильной теории **P**.

Предыдущие утверждения носили несколько абстрактный характер, потому что оставалось неясным – много ли наследственных функций выбора, как их строить, каковы главные примеры. Сейчас мы обратимся к этим вопросам. Надо сказать, что важная часть теории – объяснение "сложных" объектов черех "более простые" понятия. В нашем случае более простое понятие – это бинарное отношение на W.

Важнейший пример или модель. Предположим, что на множестве W задано бинарное отношение, которое мы обозначим как $<$ (несмотря на то, что допускаются вещи типа $x < x$ или нетранзитивность). Интуитивный смысл: $a < b$ (b доминирует a), если состояние b более нормальное, нежели состояние a. Будем формировать $N_<(A)$ как множество "наиболее нормальных" состояний в A. Иначе говоря,

$$N_<(A) = a \in A, \text{ не существует } b \in A, \text{ такого что } a < b.$$

Легкая проверка показывает, что полученная ФВ наследственна. В самом деле, если в множестве нет более нормальных, чем a, то нет и в меньшем множестве.

Хотя такие "бинарные" модели дают массу примеров наследственных ФВ и соответствующих гиперотношений, они не исчерпывают все наследственные ФВ. Вот некоторые примеры.

Пример 1. $W = \{a, b, c\}$, $N(A) = A$ для всех $A \subseteq W$ кроме $A = W$, где $N(W) = \{b\}$. Эта ФВ наследственная, но не порождается никаким бинарным отношением $<$.

Пример 2. Пусть W - бесконечное множество (например, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел). И пусть $N(A) = A$, если A конечное подмножество в W, и $\emptyset$, если A бесконечное подмножество. Это, конечно, наследственная ФВ, и она не задается никаким бинарным отношением на W.

Кстати, а как выглядит соотвествуещий расширяющий оператор E? Для конечного A $E(A) = A$, а для любого бесконечного $E(A) = W$.

Чтобы получить произвольные наследственные ФВ, надо воспользоваться дополнительным инструментом – объединениями. Дело в том, что объединение наследственных ФВ остается наследственной (объединение $N \cup M$ двух ФВ N и M задается очевидной формулой: $(N \cup M(A) = N(A) \cup M(A))$. Так вот, *любая наследственная ФВ N представляется как объединение нескольких ФВ вида $N_<$*. Соответственно, любое "наследственное" гиперотношение $|\!\sim$ может быть представлено так: на W имеется несколько бинарных отношений $<_i$ $(i \in I)$ ("критериев"), и нормальным состоянием считается состояние, которое наиболее нармально в соответствии с некоторым критерием. Объяснению этого принципиального результата мы посвятим некоторое время.

Пусть N – наследственная ФВ на W. Обозначим через I множество пар (a, A), где $a \in N(A)$ (иначе говоря, это график N как соотвествия из 2^W в W). Для каждого $i = (a, A) \in I$ образуем бинарное отношение $<_i$ на W по правилу:

$x <_i x$, если $x \neq a$, и $a <_i x$, если $x \notin A$.

Легко проверить, что $x \in N_{<_i}(X)$ тогда и только тогда, когда $x = a$ и $X \subseteq A$. Утверждение выше следует из более точного утверждения.

Предложение 2. $N = \cup_i N_{<_i}$.

Доказательство. Пусть X – произвольное подмножество в W. Проверим, что $N(X) = \cup_i N_{<_i}(X)$.

a) Предположим, что $a \in N(X)$; тогда $i = (a, X) \in I$. Так как (относительно $<_i$) элемент a доминируется только элементами извне X, то $x \in N_{<_i}(X)$.

b) Предположим, что $a \in \cup_i N_{<_i}(X)$. Тогда a принадлежит $N_{<_i}(X)$ для некоторого конкретного $i = (x, A) \in I$. Из описания $N_{<_i}(X)$, приведенного выше, видно, что $x = a$ и $X \subseteq A$. Так что $a \in N(A)$, и из наследования мы получаем $a \in N(X)$. $\Box$

Можно показать (см. [10]), что приведенные выше специальные ФВ $N_{<_i}$ образуют множество джойн-неприводимых элементов решетки наследственных ФВ. Дополнительные детали о структуре этой дистрибутивной решетки можно найти в [10].

Сами по себе специальные ФВ $N_{<_i}$ не очень интересны с точки зрения немонотонной логики. Дело в том, что в них много дамми. Заметим, впрочем, что дамми, не выбираемые никогда, тем не менее влияют на выбор других состояний.

Мы уже говорили про операцию прямого образа. Пусть имеется отображение множеств $f : \tilde{W} \to W$, и на "надмножестве" $\widetilde{W}$ ФВ $\widetilde{N}$. Тогда ее можно спустить на W, определив ФВ $N = f_*(\widetilde{N})$.

Мы утверждаем, что *если $\widetilde{N}$ наследственная, то ее прямой образ N тоже наследственная ФВ*. В самом деле, пусть $A \subseteq B$ и $a \in N(B) \cap A$. То, что $a \in N(B)$ охзначает, что для некоторого $\widetilde{a}$ "над" a (то есть $a = f(\tilde{a})$) $\tilde{a}$ выбирается из $f^{-1}(B)$. Кроме того $\tilde{a}$ принадлежит $f^{-1}(A)$, которое содержится в $f^{-1}(B)$. Поэтому в силу наследственности $\widetilde{N}$ элемент $\tilde{a}$ выбирается из $f^{-1}(A)$, а значит его образ $f(\tilde{a}) = a$ принадлежит $N(A)$.

В заключение обсудим вопрос о дамми и вообще о непустоте выбора. Например, если $x < x$, то x является дамми для ФВ $N_<$. Поэтому естественно ограничиваться иррефлексивными бинарными отношениями. Однако это не гарантирует непустоту выбора. В связи с этим введем одно важное понятие, которое в той или иной форме уже появлялось в литературе.

Определение. Бинарное отношение $<$ на множестве W называется *нетеровым*, если не существует бесконечных возрастающих цепочек вида $x_1 < x_2 < ....$

Заметим, что это исключает любые циклы, в том числе и вида $x < x$. Часто это условие накладывают на убывающие цепочки, и тода оно называется полной обоснованностью (well founded).

Очевидно, что если отношение $<$ нетерово, то ФВ $N_<$ непустозначна. Оказывается, имеет место частичное обращение этого утверждения (см. Предложение 4 [8]). А именно, *если наследственная ФВ N непустозначная, то существует нетеров линейный порядок $<$ на W, такой что $N_< \subseteq N$.*

В следующих двух разделах мы рассмотрим два важнейших подкласса наследственных ФВ и соответствующих гиперотношений.

4 Аддитивные и непрерывные операторы

Если E – монотонный расширяющий оператор, то для любого семейства $(A_i, i \in I)$ множеств в W имеет место включение $\cup_i E(A_i) \subseteq E(\cup_i A_i)$. Расширяющий оператор E называется *аддитивныи* (или сильно, ∞-аддитивным), если для любого семейства $(A_i, i \in I)$ это включение превращается в равенство:

$$E(\cup_i A_i) = \cup_i E(A_i).$$

Когда равенство имеет место только для конечных семейств (достаточно для двучленных), говорят о *конечной аддитивности*. Если множество W конечно, оба эти понятия аддитивности совпадают. Одлнако в бесконечном случае конечная аддитивность мало что дает. Обратимся, например, к ФВ N из Примера 2. Соответствующий расширяющий оператор E устроен так: для конечного множества A его расширение $E(A)$ равно A, тогда как для любого бесконечного A $E(A) = W$. Мы имеем конечную аддитивность, но не бесконечную, и это отражается в несколько паталогическом поведении наследственной ФВ N.

Очевидно, что аддитивные (и даже конечно-аддитивные) расширяющие операторы монотонны.

В терминах соответствующей ФВ $N = N_E$ условие аддитивности переписывается как условие (бесконечного) согласия ($\mathbf{C}$):

$$\cap_i N(A_i) \subseteq E(\cup_i A_i).$$

В самом деле, пусть $a \in N(A_i)$, то есть $a \notin E(A_i - a)$ для любого $i \in I$. Тогда (в силу аддитивности E) $a \notin E(\cup_i(A_i - a)) = E(\cup_i A_i - a)$, откуда $a \in N(\cup_i A_i)$. Так что аддитивность E влечет согласие для N. Тупое обращение этого рассуждения показывает, что согласие для N влечет включение

$$E(\cup_i A_i) \subseteq \cup_i E(A_i).$$

Противоположное включение следует из монотонности E. Таким образом установлено

Предложение 3. *Для пары двойственных N и E оператор E аддитивнен тогда и только тогда, когда ФВ N наследственная и удовлетворяет условию согласия* $\mathbf{C}$.

Главный интерес аддитивных расширяющих операторов (и наследственно-согласных ФВ) в том, что они допускают описание с помощью *одного* бинарного отношения.

Напомним, что для задания наследственной ФВ N надо было для каждого состояния $x \in W$ указать порядковый идеал $\mathcal{U}_x$ в множестве пар вида (x, A). Так вот, в случае конкордантных ФВ этот идеал обладает свойством замкнутости относительно объединений. В самом деле, если дано семейство множеств A_i, обладающее тем свойством, что $x \in N(A_i)$, то в силу свойства согласия $x \in N(\cup_i A_i)$. Поэтому вместо того, чтобы задавать всю коллекцию $\mathcal{U}_x$, достаточно указать только наибольший элемент этой коллекции, который можно обозначить как U_x. (Единственный нюанс: наибольшее множество U_x существует, если коллекция $\mathcal{U}_x$ непуста, то есть когда x не дамми. Согласно общей договоренности, объединение пустого семейства подмножеств равно $\emptyset$. И хотя формально это множество не содержит x, удобно считать в этом случае $U_x = \emptyset$. Тем более что дамми не интересны в контексте гиперотношений следования.)

А это означает, что существует очень простой механизм задания наследственно-согласных ФВ. А именно, пусть $<$ – произвольное бинарное отношение на W. Мы уже вводили ФВ $N_<$ для такого отношения: $N(A)$ состоит из множества недоминируемых (в A) элементов из A. Очевидно, такая ФВ и наследственна, и удовлетворяет **C**. Главное, что верно и обратное. Потому что надо (по ФВ N и соответствующему семейству $(U_x, x \in W)$) определить бинарное отношение $<=<_N$ по правилу:

$$x < y, \text{ если } y \notin U_x.$$

(Заметим, что в случае, когда x – дамми для N, по нашему соглашению $U_x = \emptyset$ и поэтому $x < x$, так что x дамми для $<$.) И очевидно, что $N = N_<$.

Впрочем, отношение $<$ можно определить и более прямо. Надо положить $x < y$, если $x \notin N(\{x, y\})$ ("выявленное предпочтение"). Для такого $<$ мы снова имеем $N = N_<$. В самом деле, если $a \in N(A)$, то a не доминируется никаким элементом $b \in A$. Потому что если $a < b$, то по определению $<$ $a \notin N(a, b)$, а тогда из наследования

$a \notin N(A)$, вопреки предположению.

Обратно, пусть a не доминируется никаким b из A, то есть $a \in N(\{a, b\})$ для любого $b \in A$. Тогда в силу условия **C** элемент a выбирается из A.

Такое представление ФВ через бинарные отношения вполне соотвествует интерпретации $N(A)$ как множества наиболее "нормальнох" состояний в A. В данном случае отношение нормальности $<$ является произвольным бинарным отношением; не предполагается какая-либо иррефлексивность или транзитивность. Последнее условие появится при рассмотрении более сильных классов гиперотношений.

Кстати, а как выглядит замыкание $E(A)$ множества A в терминах отношения $<$? По определению $x \in E(A)$ тогда и только тогда, когда $x \notin N(A \cup x)$, то есть либо $a \in A$, либо в A имеется элемент a, такой что $x < a$ (либо x – дамми). Таким образом $E(A)$ получается добавлением к A всех дамми и всех элементов, которые доминируются элементами из A.

Замечание. Вместо произвольных бинарных отношений $<$ можно использовать (почти с таким же успехом) рефлексивные отношения $\preceq$, полагая $x \preceq y$, если $x < y$ или $x = y$. Единственный нюанс связан с тем, что множество дамми-элементов нужно задавать отдельно. Именно это обстоятельство и заставляет работать с отношениями $<$. В тех же случаях, когда дамми нет (а это наиболее интересные ситуации), удобнее оказывается работать с рефлексивными отношениями $\preceq$. Для таких отношений мы будем использовать специальные ФВ, обозначаемые как $Max_{\preceq}$. По определению

$$Max_{\preceq}(A) = \{a \in A, \text{ такие что } a \preceq x \text{ влечет } a = x\}.$$

Перейдем теперь к гиперотношению $|\!\sim = |\!\sim_N$, соответствующему ФВ N. Как в его терминах выражается условие согласия **C**? Ответ такой.

Пусть дано семейство множеств $(A_i, i \in I)$*. Если* $\cup_i A_i |\sim C$*, то существуют множества* C_i*, такие что* $A_i |\sim C_i$ *для любого* $i \in I$ *и* $C = \cap_i C_i$*.*

В самом деле, пусть ФВ N удовлетворяет **C**. И $\cup_i A_i |\sim C$, то есть $N(\cup_i A_i) \subseteq C$. Положим $C_i = C \cup N(A_i)$. Тогда $\cap_i C_i = C \cup (\cap_i N(A_i)) = C$, так как $\cap_i N(A_i) \subseteq N(\cup_i A_i) \subseteq C$. Обратно, пусть $x \in N(A_i)$ для любого $i \in I$. Положим $C = N(\cup_i A_i)$. Согласно условию выше $C = \cap_i C_i$, где $A_i |\sim C_i$ для любого $i \in I$, то есть $N(A_i) \subseteq C_i$. Поэтому $x \in \cap N(A_i) \subseteq \cap_i C_i = C = N(\cup_i A_i)$.

4.1 Непрерывность

Цепью множеств в W называется семейство подмножеств $(A_i, i \in I)$, любые два члена которой сравнимы по включению. Можно считать, что множество индексов I упорядочено, и что $A_i \subseteq A_j$ при $i \leq j$. Монотонный расширяющий оператор E называется *непрерывным*, если условие аддитивности выполнено для любой цепи. Наследственная ФВ N называется *непрерывной*, если непрерывен соотвествующий расширяющий оператор E; аналогично для соотвествующего гиперотношения. Непосредственно в терминах ФВ условие непрерывности означает, что если для цепи множеств $(A_i, i \in I)$ выполнено $a \in N(A_i)$ для любого $i \in I$, то $a \in N(\cup_i A_i)$. Например, для ФВ из Примера 2 это условие нарушается, с чем и связано паталогичность этой ФВ.

Главное, что дает непрерывность – это существование максимальных множеств с интересующими нас свойствами. Пусть, к примеру, ФВ N не только наследственная, но еще и непрерывная. Тогда для каждой точки x существует максимальное множество A со свойством $x \in N(A)$. Более точно, имеет место следующее утверждеие.

Лемма 2. *Пусть N – непрерывная наследственная ФВ, и $a \in N(A)$. Тогда существует максимальное по включению множество A', содержащее A и такое, что $a \in N(A')$.*

Доказательство получается стандартным применением Леммы Цорна.

Это позволяет значительно более экономно представлять такие ФВ бинарными отношениями. Если раньше мы в качестве индексирующего множества I брали множество всех пар (a, A) со свойством $a \in N(A)$, то теперь можно брать такие пары, что A – максимальное по включению с этим свойством. Другие применения непрерывности будут приведены в следующих разделах.

Непрерывность, как и конечная аддитивность – это частные случаи общей аддитивности. Но как они различны! Если конечная аддитивность является весьма существенным свойством, то непрерывность выглядит достаточно умеренным требованием. Например, она всегда выполнена в случае конечного множества W. В силу этого оно представляется достоточно удобным требованием при работе с бесконечным случаем. С другой стороны, конечная аддитивность и непрерывность в совокупности эквивалентны аддитивности, как утверждает следующая

Лемма 3. *Если расширяющий оператор E конечно аддитивен и непрерывен, то он аддитивен.*

Доказательство. Пусть $(A_i, i \in I)$ – семейство подмножеств в W. Нужно показать, что $E(\cup_i A_i) = \cup_i E(A_i)$. Введем на множестве индексов I некоторый полный порядок $<$. Напомним, что (порядковым) идеалом называется подмножество $J \subseteq I$, которое обладает свойством: если $j \in J$ и $i < j$, то $i \in J$. Скажем, что идеал J хороший, если выполнено равенство $E(\cup_{j \in J} A_j) = \cup_{j \in J} E(A_j)$. Нужно показать, что все множество I является хорошим идеалом. Предположим, что это не так. Тогда имеется индекс j, такой что идеал $J = \{i, i < j\}$ не хороший. Среди таких "плохих" индексов j имеется минимальный (в силу полноты порядка $<$); и пусть J – соответствующий нехороший идеал.

Предположим, что этот идеал J не имеет наибольшего элемента. Тогда J представляется как объединение строго меньших (следовательно, хороших) идеалов. Для такого идеала K пусть $A_K = \cup_{i\in K} A_i$. И так как идеал K хороший, то $E(A_K) = \cup_{i\in K} E(A_i)$. Множества A_K, когда K пробегает строго меньшие идеалы в J, образуют цепь. И в силу непрерывности оператора E, $E(\cup_K A_K) = \cup_K E(A_K)$. Левая часть этого равенства равна $E(\cup_{i\in J} A_i)$, правая часть – $\cup_K E(A_K) = \cup_K(\cup_{i\in K} E(A_i)) = \cup_{i\in J} E(A_i)$. Но это значит, что $E(\cup_{i\in J} A_i) = \cup_{i\in J} E(A_i)$, то есть что идеал J хороший. Противоречие с тем, что J не хороший.

Прежположим теперь, что идеал J имеет наибольший элемент k, и рассмотрим идеал $K = J - \{k\}$. Мы имеем $J = K \cup \{k\}$. Так как K строго меньше J, он хороший и выполнено равенство $E(A_K) = E(\cup_{i\in K} A_i = \cup_{i\in K} E(A_i)$. Так как $J = K \cup \{k\}$, то из конечной аддитивности мы получаем равенство $E(A_J) = E(A_K \cup A_k) = E(A_K) \cup E(A_k) = \cup_{i\in K} E(A_i) \cup E(A_k) = \cup_{i\in J} E(A_i)$. То есть снова идеал J хороший, в противоречие с тем, что он не хороший. $\square$

5 Операторы замыкания и соответствующие ФВ

Рассмотрим теперь другой подкласс монотонных операторов, в чем-то более изощренный, нежели аддитивные операторы. Вместо аддитивности тут будет обыгрываться транзитивность.

Определение. Монотонный расширяющий оператор E называется *оператором* *замыкания*, если $E(E(A)) = E(A)$ для любого A. Коротко – $EE = E$. Множества C со свойством $C = E(C)$ называются *замкнутыми*.

Чтобы описать дуальные ФВ, рассмотрим следующее условие на ФВ N:

(**W**) Пусть $b \notin N(A \cup b)$ для любого $b \in B$. Предположим, что $x \notin N(A \cup B \cup x)$. Тогда $x \notin N(A \cup x)$.

Предложение 4. *Пусть N и E – дуальные, причем N – наследственная ФВ. E является оператором замыкания тогда и только тогда, когда N удовлетворяет* **W**.

Доказательство. Пусть E – оператор замыкания. Проверим (**W**) для ФВ N. $a \in N(A \cup a)$ означает, что $a \notin E(A)$. Условия $b \notin N(A \cup b)$ означают, что $b \in E(A)$, причем для любого $b \in B$, так что $B \subseteq E(A)$. В силу монотонности E мы получаем, что $E(A) \subseteq E(A \cup B) \subseteq E(E(A) \cup B) = E(E(A)) = E(A)$. Так что $E(A \cup B) = E(A)$ и поэтому не содержит a. Что и означает, что $a \in N(A \cup B \cup a)$.

Обратно, пусть N удовлетворяет (**W**). В силу наследственности N оператор E монотонный, и остается убедиться, что $E(E(A)) = E(A)$. Включение $\supset$ выполнено из монотонности, так что надо показать включение $\subseteq$. Пусть $x \in E(E(A))$, то есть $x \notin N(E(A) \cup x)$. Тогда $x \notin N(A \cup b \cup x)$ для любого $b \in E(A)$ (наследственность). Отсюда мы заключаем (используя **W**), что $x \notin N(A \cup x)$, то есть $x \in E(A)$. $\square$

Оно и понятно: замыкание $E(A)$ получается из A добавлением 'зависимых от A элементов', то есть таких b, что $b \notin N(A \cup b)$.

Еще одно замечание. В отличие от общих наследственных ФВ, в случае замкнутых ФВ дамми не только не выбираются, но и не влияют на выбор. По этой причине далее мы будем предполагать, что наши замкнутые операторы и ФВ не имеют дамми.

Приведем важнейший класс примеров замкнутых ФВ, оправдывая заодно упоминание транзитивности. Пусть $\preceq$ – предпорядок на W, то есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на W. Тогда ФВ $Max_{\preceq}$ является замкнутой (и аддитивной).

Проще это увидеть в контексте расширяющих операторов. Для $A \subseteq W$ соответствующий $\preceq$ оператор E действует так: $E(A) = \{x \in W, x \preceq a$ для некоторого $a \in A\}$. Иначе говоря, мы присоединяем к A все меньшие элементы. Этот оператор монотонный для любого отношения $\preceq$, но когда отношение $\preceq$ транзитивно, то он идемпотентен, так что мы получаем оператор замыкания. Аддитивность этого оператора также очевидна.

Однако с помощью такой простой конструкции (или структуры) получаются далеко не все операторы замыкания и замкнутые ФВ. Все дело в том, что так получаются аддитивные операторы. Чтобы получить все, надо (как и в случае монотонных операторов) либо использовать несколько предпорядков, либо подключить операцию прямого образа. А именно, исходя из замкнутой и непрерывной ФВ N на W мы построим отображение $f : \tilde{W} \to W$ и предпорядок $\preceq$ на $\tilde{W}$, такие, что N будет прямым образом ФВ $Max_{\preceq}$, $N = f_*(Max_{\preceq})$. Об этом будет рассказано в следующем подразделе.

5.1 Каноническое накрытие

Здесь мы опишем конструкцию канонического накрытия (или супермножества $\widetilde{W} = \widetilde{W}(W, N)$, которая позволяет восстанавливать замкнутую непрерывную ФВ N. Для этого удобно ввести одно понятие.

А именно, для состояния $x \in W$ *барьером* x мы называем максимальное по включению множество $U \subseteq W$, такое что $x \in N(U \cup x)$. Стоит отметить, что барьер является замкнутым множество (то есть $E(U) = U$). В самом деле, если U не замкнуто, к нему можно добавить некоторый элемент b (не меняя $E(U)$), то есть такой, что $b \notin N(U \cup b)$; но тогда по аксиоме **W** $x \in N(U \cup b \cup x)$, что противоречит максимальности U. Из Леммы 2 вытекает следующая

Лемма 4. *Если $x \in N(X \cup x)$, то существует барьер U состояния x, такой что $X \subseteq U$.*

Переходим к построению $\widetilde{W}$. Суперсостоянием мы называем пару $\tilde{x} = (x, U)$, где $x \in W$, а U – барьер для x. Супермножество $\widetilde{W}$ состоит из всех суперсостояний. Отображение $f : \widetilde{W} \to W$ переводит суперсостояние $\tilde{x} = (x, U)$ в состояние x. Слой $f^{-1}(x)$ состоит из всех $\tilde{x} = (x, U)$; мы говорим также, что $\tilde{x}$ *лежит над* x. Отметим, что слой над x непуст тогда и только тогда, когда x не является дамми.

На $\widetilde{W}$ имеется канонический предпорядок $\preceq$; для $\tilde{x} = (x.U)$ и $\tilde{y} = (y, V)$ по определению $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$, если $U \subseteq V$. Очевидно, что отношение $\preceq$ на $\widetilde{W}$ рефлексивно и транзитивно. Отметим также, что различные точки слоя $f^{-1}(x)$ несравнимы друг с другом. Обозначим через $\widetilde{N}$ ФВ на $\widetilde{W}$, заданную как $Max_{\preceq}$.

Предложение 5. $f_*(\widetilde{N}) = N$.

Доказательство. Предположим, что $x \in N(A)$, и покажем, что $x \in f_*(\widetilde{N})(A)$. Для этого нам нужно указать некоторую суперточку $\tilde{x}$ над x, которая не доминируется никакой точкой $\tilde{y}$ из $f^{-1}(A)$.

Так как $x \in N(A) = N((A - x) \cup x)$, то по Лемме выше существует барьер U точки x, такой что $A - x \subseteq U$. Вот мы и возьмем в качестве $\tilde{x} = (x, U)$. Покажем, что эта суперточка $\tilde{x}$ не доминируется (то есть неверно, что $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$) никакой другой суперточкой $\tilde{y} = (y, V)$, где $y \in A$, а $U \subseteq V$. Как уже указывалось выше, $y \neq x$.

Предположим, что $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$; это означает, что $y \in A - x \subseteq U \subseteq V$, что противоречит тому, что y не принадлежит своему барьеру V.

Заметим, что это рассуждение не использует замкнутость N.

Предположим теперь, что $x \notin N(A) = N((A - x) \cup x)$. Мы покажем, что любая суперточка $\tilde{x} = (x, U)$ доминируется некоторой суперточкой $\tilde{y} = (y, V)$, где $y \in A$. Так как x не принадлежит $N(A)$, то для любого барьера U точки x множество U не содержит $A - x$. То есть существует точки y из A, отличная от x, которая не принадлежит U. Причем эта точка y не является дамми, поскольку любая дамми принадлежит любому замкнутому множеству, в том числе U.

Мы утверждаем, что $y \in N(U \cup y)$. В самом деле, в противном случае, так как $x \in N(U \cup x)$, то из аксиомы $\mathbf{W}$ мы получали бы, что $x \in N(U \cup y \cup x)$, что противоречим максимальности U. Но тогда, в силу той же леммы, U можно расширить до V, барьера точки y. И мы получаем суперточку $\tilde{y} = (y, V)$, которая доминирует $\tilde{x}$. $\square$

Этот принципиальный результат допускает обращение. А именно, предположим, что на множестве Z заданы две структуры: предпорядок $\preceq$ и сюръективное отображениме $f : Z \to W$. И при этом выполнено условие *несравнимости*: если для z и z' (из Z) $f(z) = f(z')$, то z и z' несравнимы отношением $\preceq$.

Предложение 6. *Прямой образ f_* ФВ $Max_{\preceq}$ является замкнутой ФВ на W.*

Доказательство. Очевидно, что ФВ $N = f_*(Max_{\preceq})$ наследственная. Поэтому остается проверить выполнение аксиомы $\mathbf{W}$. Для начала поймем, что означает утверждение $b \notin N(A \cup b)$. Оно означает, что любое $\tilde{b}$ над b доминируется некоторым элементом $\tilde{c}$ из $f^{-1}(A \cup b)$. В силу условия несравнимости $\tilde{c}$ не может лежать над b. Так что $f(\tilde{c}) \in A$. Итак, утверждение $b \notin N(A \cup b)$ означает, что слой $f^{-1}(b)$ содержится в идеале $\preceq (f^{-1}(A)))$, порожденным множеством $f^{-1}(A)$.

Аналогично утверждение $x \in N(A \cup x)$ означает, что слой $f^{-1}(x)$ не содержится в идеале $\preceq (f^{-1}(A))$.

Приступим к проверке аксиомы **W**. Пусть $b \notin N(A \cup b)$ для всех b из некоторого множества $B \subseteq W$. Это значит, что $f^{-1}(B)$ содержится в идеале $\preceq f^{-1}(A)$. В силу транзитивности $\preceq$ идеал $\preceq f^{-1}(A \cup B) = \preceq f^{-1}(A)$. Теперь уже ясно, что если $x \in N(A \cup x)$, то $x \in N(A \cup B \cup x)$. $\square$

Замечание. Так как оператор замыкания E полностью определяется системой замкнутых множеств (таких множеств C, что $E(C) = C$), то полезно (в обозначениях Предложения 6) понять, какие подмножества в W замкнутые. В терминах ФВ N замкнутость C означает, что $x \notin N(C \cup x)$ влечет $x \in C$. Или чуть иначе: если $x \notin C$, то $x \in N(C \cup x)$. В терминах $f : Z \to W$ и предпорядка $\preceq$ на Z последнее означает, что слой $f^{-1}(x)$ не содержится в идеале $\preceq f^{-1}(C)$. Иначе говоря, замыкание $E(A)$ состоит из таких точек x, что слой $f^{-1}(x)$ целиком содержится в идеале $\preceq f^{-1}(A)$. То есть

$$E(A) = f_!(\preceq f^{-1}(A)),$$

где $f_!$ означает полный образ.

Самое замечательное (и не сразу бросающееся в глаза) состоит в том, что мы получаем неожиданное описание решетки замкнутых множеств (для любого конечного множества W). Так что мы получаем модель (или конструкцию), позволяющую строить произвольные операторы замыкания на конечном множестве W. Для этого надо взять "надмножество" $f : Z \to W$ и предпорядок $\preceq$ на Z, удовлетворяющий условию несравнимости. (Собственно говоря, конечность W можно ослабить; реально нужна только непрерывность оператора замыкания. То есть то, что объединение возрастающей цепи замкнутых множеств замкнуто. Это не очень серьезное ограничение.) Полученный результат тесно связан с основным результатом работы Хабиба и Нурина

[12] о представлении конечных рещеток цветными посетами. Формально они описывают открытые множества, то есть дополнения к замкнутым. Но это чисто словесное различие. Более важно то, что Хабиб и Нурин используют посеты (то есть частичные порядки) вместо наших предпорядков. Это приводит к немного более усложненной формулировке, и только.

Возвращаясь к гиперотношениям. Замкнутое (и непрерывное) гиперотношение задается следующей естественной моделью: $A|\sim C$, если $N(A) \subseteq C$, а $N(A)$ формируется как множество максимальных элементов в A относительно некоторого предпорядка $\preceq$. Только надо сделать оговорку – предпорядок $\preceq$ надо брать не на исходном множестве состояний W, а на некотором его "надмножестве" $\widetilde{W}$, причем должно выполняться свойства несравнимости (которое означает, что "суперсостояния" над некотором одним состоянием несравнимы отношением 'более нормально', то есть в каком-то смысле "равноправны".

6 Преференциальные гиперотношения и ФВ Плотта

Теперь мы рассмотрим самый интересный класс гиперотношений. Этот класс замечателен тем, что на него независимо обратили внимание и в немонотонной логике, и в теории выбора. В немонотонной логике он называется системой **P** (*преференциальной* системой)[1], а в теории выбора – независимостью от пути. И одновременно он возник в комбинаторике как выпуклые геометрии. Так обойти его не представляется возможным.

[1]Авторы [3] пишут в похвалу своей преференциальной системе **P**: “Мы думаем, что хорошая система рассуждений должна удовлетворять всем правилам **P**.”

Надо сказать, что в немонотонной логике это первый класс, который на нашем нетрадиционном пути встречался и был исследован ранее ([3], и затем [4]). При его введении мы будем держаться близко к изложению [4]. Собственно говоря, они добавляют к базисным аксиомам две новых:

(**CM**) Если $A|\sim B$ и $A|\sim C$, то $A \cap B|\sim C$,

и

(**ИЛИ**) Если $A|\sim C$ и $B|\sim C$, то $A \cup B|\sim C$.

Первая аксиома носит название *Осторожной Монотонности*, а вторая уже встречалась нам при обсуждении наследственных ФВ и соответствующих гиперотношений следования. Так что фактически речь идет о том, что мы к условию наследования добавляем одну новую аксиому осторожной монотонности. Поэтому естественно ее обсудить.

Содержательный смысл в том, что если информация B не противоречит A (не является "исключением из нормы"), то добавление ее к A не меняет заключение C. К примеру, A – ‘возможен дождь’, C – ‘надо взять зонтик’, B – ‘тучи на небе’. Если мы берем зонтик при известии о возможности дождя, то естественно брать зонтик и при известии о возможности дождя и тучах. Если же сообщение B говорит о нарушении нормальности, то добавление этой информации к A может сильно изменить заключение. Например, если B говорит, что ‘будет сильный град’, то лучше вообще не выходить из дома.

А теперь формальный смысл при понимании $A|\sim C$ как включения $N(A) \subseteq C$ для

ФВ N. В этих терминах аксиома **CM** читается так: Если $N(A) \subseteq B$ и $N(A) \subseteq C$, то $N(A \cap B) \subseteq C$. Взяв $C = N(A)$, мы получаем, что если $N(A) \subseteq B$, то $N(A \cap B) \subseteq N(A)$. А заменяя B на $A \cap B$, мы приходим к формулировке: если $N(A) \subseteq B \subseteq A$, то $N(B) \subseteq N(A)$. Но это не что иное, как формулировка аксиомы Айзермана для ФВ N, которая (в присутствии аксиомы наследования) эквивалентна следующей аксиоме *отбрасывания* **O**:

O Если $N(A) \subseteq B \subseteq A$, то $N(B) = N(A)$.

Легко понять, что аксиома **O** в свою очередь влечет **CM**. Таким образом, изучение "преференциальных" отношений следования (или преференциальных гиперотношений) сводится к изучению ФВ, удовлетворяющих условиям наследования и отбрасывания **H** и **O**. Этот класс ФВ впервые появился в работе Плотта [11] года под названием "независимости от пути". Мы для краткости называем такие ФВ Плоттовскими.

Определение. ФВ N называется *Плоттовской*, если выполнено следующее условие "независимости от пути":

$$N(A \cup B) = N(N(A) \cup N(A)).$$

Связь системы **P** (или $\mathbf{P}_\infty$, "инфинитарной версии правил хорошо известной системы **P** как пишут [4]) с ФВ Плотта была установлена в [4].

Лемма 5. *Следующие условия на ФВ N эквивалентны:*
1) *Для любого семейства $(A_i, i \in I)$ $N(\cup_i A_i) = N(\cup_i N(A_i))$.*
2) *N – ФВ Плотта.*

3) *N удовлетворяет аксиомам* **H** *и* **O**.

Доказательство. Очевидно, что 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Свойство наследования очевидно из Леммы ???. Поэтому проверим **O**. Пусть $N(A) \subseteq B \subseteq A$. Тогда

$$N(A) = N(A \cup B) = N(N(A) \cup N(B)) = N(N(N(A) \cup N(B)) = N(N(A) \cup B) = N(B).$$

Здесь мы пользовались тем, что для любой наследственной ФВ $N(N(A)) = N(A)$.

3) $\Rightarrow$ 1). В силу наследования мы имеем включения

$$N(\cup_i A_i) \subseteq \cup_i N(A_i) \subseteq \cup_i A_i.$$

Обозначая $\cup_i A_i$ как A, а $\cup_i N(A_i)$ как B, мы получаем $N(A) \subseteq B \subseteq A$, откуда с помощью **O** равенство $N(A) = N(B)$. □

Мы утверждаем, что расширяющий оператор E, связанный с ФВ N, является оператором замыкания. Можно проверить, что для N выполнена аксиома **W**. Но мы выберем другой путь, более близкий к оригинальному пути Кошевого [5].

Лемма 6. $N(E(A)) = N(A)$.

Доказательство. Напомним, что $E(A)$ получается добавлением к A всех таких элементов b, что $b \notin N(A \cup b)$. Обозначим множество таких элементов b как B. Тогда $E(A) = A \cup B$.

$$N(E(A)) = N(A \cup B) = N(\cup_{b \in B}(A \cup b)) \subseteq \cup_b N(A \cup b).$$

Так как $N(A \cup b) \subseteq N(A) \cup b$ и не содержит b, то все $N(A \cup b)$ содержатся в $N(A)$. Поэтому и $N(E(A)) \subseteq N(A)$. Применяя к цепочке $N(E(A)) \subseteq A \subseteq E(A)$ аксиому **O**, мы получаем $N(A) = N(E(A))$. □

Однако $E(A)$ не только имеет тот же выбор, что и A. Это наибольшее множество C со свойством $N(C) = N(A)$. Это утверждает следующая

Лемма 7. *Если* $N(C) = N(A)$, *то* $C \subseteq E(A)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$N(A \cup C) = N(N(A) \cup N(C)) = N(N(A)) = N(A).$$

Предположим теперь, что имеется элемент из C, который не принадлежит $E(A)$. Так как $c \notin E(A)$, то $c \in N(A \cup c)$. Рассмотрим цепочку включений

$$N(A \cup C) = N(A) \subseteq A \cup c \subseteq A \cup C.$$

Применяя аксиому **O**, мы заключаем, что $N(A \cup c) = N(A)$, то есть что $c \in N(A)$ и тем более A и $E(A)$. Противоречие. $\square$

Следствие 1. $E(E(A)) = E(A)$, *то есть* E *– оператор замыкания.*

В самом деле, по Лемме 6 $N(EE(A)) = N(E(A)) = N(A)$. А тогда по лемме 7 $EE(A) \subseteq E(A)$. Противоположное включение следует из того, что E расширяющий. $\square$

Следствие 2. $E(N(A)) = E(A)$ *и, в частности,* $A \subseteq E(N(A))$.

В самом деле, $E(N(A))$ – наибольшее множество C со свойством $N(C) = NN(A) = N(A)$, как и $E(A)$.

Таким образом, все предыдущие результаты про представление замкнутых ФВ применимы к ФВ Плотта и, как мы увидим, с более точными формулировками. Однако тут разумно слегка сменить терминологию и обозначения. Дело в том, что, как мы увидим, наш оператор замыкания дает выпуклую геометрию (факт, замеченный Кошевым [5]), и поэтому его естественно понимать как "выпуклую оболочку". Так что вместо E мы будем писать co, а вместо N – ex, "крайние точки". Для любого оператора замыкания E точка a из A называется *крайней точкой* множества A, если a не принадлежит замыканию $A - a$ ($a \notin E(A - a)$). Множество крайних точек множества A обозначается $ex(A)$. Но $a \notin E(A - a)$ означает в точности, что $a \in N(A)$. Так что $ex(A) = N(A)$.

Итак, связанный с Плоттовской ФВ расширяющий оператор co является оператором замыкания, а сама ФВ реализуется как взятие крайних точек. Однако оператор co, связанный с ФВ Плотта, не просто оператор замыкания. Он обладает еще одним важным свойством (см. Следствие 2), которое по аналогии с классической выпуклостью можно назвать *свойством Минковского-Крейна-Мильмана*:

$$\mathbf{MKM} : A \subseteq co(ex(A)).$$

Его можно переформулировать и как равенство $co(A) = co(ex(A))$, и оно утверждает, что крайних точек "достаточно много". Все это оправдывает введение следующего понятия.

Определение. Оператор замыкания со свойством Минковского-Крейна-Мильмана будем называть *МКМ-оператором.*

Наша ближайшая цель – показать, что ФВ ex, связанная с произвольным МКМ-оператором co, является Плоттовской. Это покажет, что Плоттовские ФВ и МКМ-операторы – это просто дуальные понятия, факт, установленный Кошевым [5] в конечном случае и [4] в общем.

Начнем с напоминатия, что ФВ N, связанная с оператором замыкания co, совпадает с ex. В частности, ФВ ex наследственная.

Предложение 7 ([9], ср. с Леммой 6). *Пусть со – МКМ-оператор. Тогда* $ex(co(A)) = ex(A)$.

Доказательство. Включение $ex(co(A)) \subseteq ex(A)$ выполнено для любого оператора замыкания. В самом деле, $co(A) = A \cup B$, где $B = \{b, b \notin ex(A \cup b)\}$. Поэтому $ex(co(A)) = ex(A \cup B) = ex(\cup_b(A \cup b)) \subseteq \cup_b ex(A \cup b) \subseteq ex(A)$ (ср. с доказательством Леммы 6). Установим противоположное включение. Пусть a принадлежит $ex(A)$ (и, в частности, принадлежит A), но не принадлежит $ex(co(A))$. Тогда $ex(co(A)) \subseteq A - a$, и, применяя монотонный оператор со, мы получаем включение $co(ex(cc(A))) \subseteq co(A-a)$, Левая часть содержит, согласно МКМ, $co(A)$, и, в частности, содержит a, так что $a \in co(A - a)$. Но последнее означает, что a не является крайним элементом A. Противоречие. □

Следствие 1. *Если со – МКМ-оператор, то ФВ ех удовлетворяет условию отбрасывания* **O**.

Доказательство. Применяя оператор co к включениям $ex(A) \subseteq B \subseteq A$, мы получает включения $co(ex(A)) \subseteq co(B) \subseteq co(A)$. В силу МКМ $co(ex(A)) = co(A)$, откуда $co(A) = co(B)$ и $ex(co(A)) = ex(co(B))$. Согласно МР это дает $ex(A) = ex(B)$. □

Таким образом, ФВ ex, построенная по МКМ-оператору co, является ФВ Плотта. Это показывает, что МКМ-операторы и ФВ Плотта находятся в естественной двойственности.

Следствие 2. *Любой МКМ-оператор обладает т.н. свойством анти-обмена, то есть является выпуклой геоиетрией, что оправдывает "выпуклую" терминологию.*

Доказательство. Напомним, что свойство антиобмена состоит в следующем: если a и b не принадлежат $co(X)$, и $co(X \cup a) = co(X \cup b)$, то $a = b$. Применим оператор ex к равенству $co(X \cup a) = co(X \cup b)$. Мы получаем равенство $ex(co(X \cup a)) = ex(co(X \cup b))$. В силу Предложения 7, мы получаем равенство $ex(X \cup a) = ex(X \cup b)$. Но $ex(X \cup a)$ равно a плюс нечто из X; аналогично для $ex(X \cup b)$, откуда $a = b$. $\square$

В случае конечного W свойство анти-обменна эквивалентно МКМ-свойству, но в общем случае свойство антиобмена значительно слабее. Это показывает Пример 2. Для приведенного там оператора замыкания антиобмен выполнен, но соответствующая ФВ не Плоттовская. Впрочем, в этом примере нарушается непрерывность. Однако и непрерывность не спасает, как показывает следующий

Пример 3. Пусть $W = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел с естественным порядком. ФВ N выбирает из подмножества $A \subseteq W$ наибольший элемент, если он имеется (то есть если A конечно и непусто); в противном случае выбор пуст. Для соответствующего расширяющего оператора $E(A) = \{0, ..., \max(A)\}$, если A конечно, и все W, если A бесконечно. Легко проверить, что E – непрерывный оператор замыкания со свойством антиобмена. Однако для бесконечного A множество $ex(A)$ пусто, так что свойство МКМ не выполнено.

До сих пор мы рассуждали про ФВ Плотта (и МКМ-операторы), не видя хороших конструкций или представлений этих объектов. Пора обратиться к этой стороне предмета. Однако начнем с замечания.

Если N – не просто ФВ Плотта, но еще и непрерывная, тогда можно воспользоваться конструкцией канонического накрытия для представления этой ФВ N. Заметим только, что в этом случае предпорядок $\preceq$ на "супермножестве" $\widetilde{W}$ является не только транзитивным, но и антисимметричным. То есть если $\tilde{x} \preceq \tilde{y}$ и $\tilde{y} \preceq \tilde{x}$, то $\tilde{x} = \tilde{y}$. Иными словами, $\preceq$ является (частичным) порядком на $\tilde{W}$. Это очень важное обстоятельство; грубо говоря, ФВ Плотта выделяются среди замкнутых ФВ тем, что в них отсутствуют "эквивалентные" состояния. Для замкнутой ФВ N вполне может случиться, что элементы-состояния a и b не дамми, но $N(a, b)$ пусто (a и b подавляют друг друга).

Как уже говорилось, ФВ Плотта может иметь дамми, но они никак не влияют на выбор. По этой причине можно ограничиться ФВ Плотта без дамми. Но это еще не все. *Если дамми нет, то $N(A)$ непусто для любого непустого A.* В самом деле, пусть $N(A)$ пусто, а A – нет. Возьмем произвольный элемент $a \in A$; тогда применение аксиомы отбрасывания **O** к цепочке $N(A) \subseteq \{a\} \subseteq A$ дает, что $N(a) = N(A) = \emptyset$, то есть a – дамми.

Теперь о конструкциях. Имеется две важные общие конструкции ФВ Плотта.

Первая. Пусть $\preceq$ нетеров (линейный или частичный) порядок на W. Тогда ФВ $Max_{\preceq}$ (определение см. выше) является ФВ Плотта. Это утверждение кажется совершенно очевидным. Однако встречный вопрос – а при чем тут нетеровость? Казалось бы, нетеровость не нужна. Но без нее утверждение неверно, как показывает Пример выше.

Поэтому стоит привести аккуратное рассуждение. Собственно, надо проверить лишь условие отбрасывания. Итак, пусть $N(A) \subseteq B \subseteq A$; нужно показать, что любой элемент b, который выбирается из B, выбирается и из A. Предположим, что b – наилучший в B, но не наилучший в A. То есть имеется $a \in A$, такой что $b \prec a$ (здесь $x \prec y$ означает, что $x \preceq y$ и $x \neq y$). Тогда, в силу нетерововости можно считать, что a максимальный в A, то есть принадлежит $N(A)$. А так как $N(A) \subseteq B$, то $a \in B$ и доминирует b. Противоречие.

Таким образом, нетеров (линейный или частичный) порядок дает ФВ Плотта; различие лишт в том, что линейный порядок дает синглетонный (однозначный) выбор, тогда как частичный – многозначный.

Вторая конструкция основана на том, что объединение (в любом количестве) Плоттовских ФВ снова Плоттовская ФВ. Это легко проверяется. Поэтому мы сформулируем немного иной принцип, с которым уже сталкивались.

Предположим, что мы имеем отображение множеств $f : \widetilde{W} \to W$, и ФВ Плотта $\widetilde{N}$ на $\widetilde{W}$. Тогда прямой образ $N = f_*(\widetilde{N})$ тоже будет ФВ Плотта на W.

В самом деле, наследственность N почти очевидна, поэтому проверим отбрасывание. Пусть $N(A) \subseteq B \subseteq A$. По определению $N(A) = f(\widetilde{N}(f^{-1}(A))$. Так как B содержит это множество, $f^{-1}(B)$ содержит $\widetilde{N}(f^{-1}(A))$. И мы имеем цепочку включений

$$N(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A).$$

В силу **O** для ФВ $\widetilde{N}$ мы имеем равенство $\widetilde{N}(f^{-1}(A)) = \widetilde{N}(f^{-1}(B))$, откуда следует равенство $N(A) = N(B)$.

Комбинация этих двух конструкций позволяет построить любую ФВ Плотта N. Для простоты будем считать, что N без дамми. В работе [8], в теореме 4 доказано, что такая функция представляется как объединение ФВ вида $Max_{\preceq}$, где $\preceq$ пробегает некоторое множество нетеровых линейных порядков на W.

Соответственно, любой МКМ-оператор может быть получет так: надо взять некоторое множество $(\preceq_i, i \in I)$ нетеровых линейных порядков на W; тогда замыкание $co(A)$ подмножества A состоит из пересечения множеств $\preceq_i A$. Иначе говоря, $co(A) = \{x \in W,$ для любого $i \in I$ существует такое $a_i \in A$, что $x \preceq_i a_i\}$.

Применительно к преференциальным гиперотношениям следования мы видим, как устроено множество $N(A)$ "нормальных" состояний в множестве $A \subseteq W$: существует семейство $(\preceq_i, i \in I)$ нетеровых линейных порядков ("критериев"), обладающее свойством: $a \in N(A)$, если a является наибольшим элементом в A относительно некоторого критерия $\preceq_i$. Иначе говоря, $N(A)$ составлено из наилучших элементов в A относительно критериев $\preceq_i$. Айзерман и Малишевский [6] называли такой выбор *совокупно-экстремальным.* [3] говорят про преференциальные гиперотношения следования, видимо по той причине, что они объясняются некоторой системой предпочтений, то есть линейных порядков.

Пример 4. Приведем один нетривиальный пример на эту тему. Пусть N – ФВ на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, которая устроена так: $N(A) = A$ для любого A, отличного от $\mathbb{N}$; $N(\mathbb{N}) = \mathbb{N} - 0$. Можно непосредственно проверить, что N ФВ Плотта. Она не непрерывна. В самом деле, множество $\mathbb{N} - 0$ представляется как возрастающий предел интервалов $[n] = \{0, 1, ..., n\}$. Для любого конечного n выполнено $0 \in N([n]) = [n]$, однако $0 \notin N(\cup_n [n]) = N(\mathbb{N})$.

Тем не менее N можно представить как объединение "линейных" ФВ. Для этого рассмотрим всевозможные нетеровы линейные порядки на $\mathbb{N}$, у которых максимальных элемент отличен от 0. Тогда объединение таких "линейных" ФВ равно N. В самом деле, если A отлично от $\mathbb{N}$, то любой $a \in A$, отличный от 0, выбирается порядком $a > ....$ Если же $a = 0$, то возьмем $b \notin A$ и порядок $b > 0 > ....$ Наконец, если $A = \mathbb{N}$, то любой элемент n, отличный от 0, выбирается порядком $n > ...$, а 0 не выбирается никаким порядком.

Последнее замечание. Допустим, что кроме всех предыдущих условий мы добавляем условие аддитивности оператора co (или, что то же самое, условие согласия **C** на ФВ N). Как тогда изменится представление N? Ответ состоит в том, что все останется по-прежнему, только можно брать $\widetilde{W} = W$. Иначе говоря, $N = Max_{\preceq}$ для некоторого нетерова *частичного порядка* $\preceq$ на W (мы снова исключаем дамми; в случае с дамми порядок $\preceq$ надо задавать на множестве $W - \{\text{дамми}\}$). Иначе говоря, нормальными (в A) считаются состояния, максимальные относительно этого частичного порядка $\preceq$. А такие существуют в силу нетеровости $\preceq$.

7 Дополнительные ФВ и гиперотношения

В заключение мы бсудим еще одну систему немонотонной логики, которая в [3] называется кумулятивно-монотонной. Ее интерес частично связан с тем, что она выбивается из нашего ряда систем, построенного на усилениях свойства наследования. Эта же система построена на совершенно другом основании. Скажем об этом сначала неформально.

В основе свойства наследования лежит идея заменимости, которая в чистом виде реализуется бинарным отношением, а в общем – несколькими бинарными отношениями. В каком-то смысле все элементы (состояния) заменимы; некоторые могут быть лучше, некоторые хуже, и если хороший вариант недоступен для выбора, он заменяется на худший. Но в экономике популярным является и другой принцип – принцип дополнительности. Когда предмет ценен на сам по себе, не по своим индивидуальным качествам, но тем, что он хорош в комбинации с некоторыми другими предметами. Например, замок или ключ к нему представляют малую ценность по отдельности, но бóльшую в совокупности. Так что основанием для включения некоторого предмета в выбор служат не индивидуальные качество предмета, а доступность 'команды', членом которой является предмет. Надо сказать, что эта идея слабо обыгрывалась в теории выбора, разве только в аксиоме отбрасывания **O**.

Перейдем теперь к формальной стороне дела.

Как уже отмечалось, наследственные ФВ характеризуются монотонностью соответствующих расширяющих операторов. Наложим теперь условие монотонности на саму ФВ.

Определение. ФВ N называется *монотонной*, если выполнено следующее свойство:

Если $A \subseteq B$, то $N(A) \subseteq N(B)$.

Такое условие в теории рационального выбора не рассматривалось, потому что оно практически всегда влечет пустозначность ФВ; единственное исключение доставляет "тривиальная" ФВ, когда $N(A) = A$ для любого A. В терминах соответствующего гиперотношения следования это условие формулируется как условие монотонности, или *левого усиления*:

Если $A \subseteq B$ и $B|\sim C$, то $A|\sim C$.

Интересующий нас класс ФВ (которые можно назвать *дополнительными*, или *кумулятивно монотонными*) задается условиями монотонности и отбрасывания. В сравнении с ФВ Плотта, требование наследственности заменено (дуальным?) требованием монотонности.

Приведем модель формирования доополнительных ФВ. Для этого зафиксируем систему $\mathcal{U}$ "открытых" множеств, замкнутую относительно произвольных объединений (в частности, содержащую $\emptyset$). Замкнутость относительно пересечений не предполагается, поэтому такая система не является топологией, но только предтопологией в терминологии [7]. И для произвольного A положим $N(A)$ равным наибольшему открытому множеству $U \in \mathcal{U}$, лежащему в A ("внутренности" A). Очевидно, такая ФВ N удовлетворяет условиям **O** и монотонности.

Пример 5. Назовем "открытым" любое подмножество $U \subseteq W$ размера 2 или больше. Соответствующая дополнительная ФВ N устроена так: $N(A) = A$, если размер A отличен от 1; в противном случае $N(A)$ пусто. Ясно, что такая ФВ даже не наследственная, то есть совершенно отлична от ФВ, рассмотренных выше.

Предложение 8. *Любая дополнительная ФВ N получается указанным выше способом из некоторой предтопологии $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Объявим "открытыми" такие множества U, что $N(U) = U$. Мы утверждаем, что открытость сохраняется при объединении. В самом деле, $N(\cup_i U_i)$ содержит каждое $U_i = M(U_i)$ в силу монотонности N, и поэтому содержит $\cup_i U_i$. Так что $N(\cup_i U_i) = \cup_i U_i$. С другой стороны, для любого A множество $N(A)$ – открытое и лежит в A. Более того, это наибольшее открытое множество, лежащее в A. В самом деле, если $N(A) \subseteq U \subseteq A$, и U открыто, то из аксиомы **O** мы имеем $U = N(U) = N(A)$. $\square$

Дополнения к открытым множествам естественно считать "замкнутыми". И замкнутость сохраняется при произвольных пересечениях. Тем самым мы снова приходим к операторам замыкания E. В терминах таких операторов ФВ N задается формулой $N(A) = \overline{E(\overline{A})}$, где $\overline{A} = W - A$ обозначает дополнительное множество. Так что мы получает, что дополнительные ФВ связаны с замкнутыми операторами, но связаны с помощью другой двойственностью, которую можно назвать *тривиаьной*, или *двойственноостью двух отрицаний*.

В случае, когда оператор замыкания E непрерывен, мы имеем описание E через предпорядок $\preceq$ на супермножестве $f : \widetilde{W} \to W$. Это дает еще более прозрачное описание строения дополнительных ФВ. Назовем *командой* элемента a минимальное открытое множество U, содержащее a. И тогда $a \in N(A)$ тогда и только тогда, когда A содержит некоторую команду элемента a. Это утверждение подтверждает приведенное выше неформальное описание дополнительных ФВ.

Двигаясь в противоположном направлении, можно начинать с того, чтобы для каждрго a задать некоторый набор "команд" этого a (пустой, если a дамми). Естественно считать, что разные команды одного и того же a несравнимы по включению. Единственное условие на эти команды состоит в том: что если b принадлежит команде U элемента a, то существует команда V элемента b, которая содержится в U, $V \subseteq U$.

Рассмотренные ранее логические системы различной силы венчают *монотонные рассуждения* (или классическая логика). Они задаются гиперотношениями $|\sim$, которые (кроме базисных аксиом) удовлетворяют аксиоме Противопоставления, которая звучит так: если $A|\sim B$, то отрицание B (то есть $\bar{B}$) $|\sim$ отрицание A, $\bar{B}|\sim \bar{A}$. Или, в терминах соотвествующей ФВ N: если $N(A) \subseteq B$, то $N(\bar{B}) \subseteq \bar{A}$.

Можно показать (см. [3]), что эта аксиома (в присутствии банальных аксиом) эквивалентна совместному выполнению наследования и монотонности. Общий вид таких ФВ – *постоянные* ФВ, которые описываются следующим образом: фиксируется некоторое множество $V \subseteq W$ миров, которые ЛПР считает возможными или реальными. И тогда $N(A) = V \cap A$.

Такие постоянные ФВ удовлетворяют наследованию и монотонности. Верно и обратное. В самом деле, пусть $V = N(W)$. Тогда для любого A из монотонности мы получаем $N(A) \subseteq A \cap V$. С другой стороны, из наследования $A \cap V = A \cap N \subseteq N(A)$. Так что $N(A) = A \cap V$.

8 Заключение

Подводя итог, можно сказать, что мы рассмотрели три главных класса гиперотношений (и соответствующих ФВ): наследственные, замкнутые и Плоттовские. Каждый класс имеет свое усиление за счет добавления аксиомы аддитивности, или согласия. И тогда соответствующий усиленный класс допускает описание с помощью бинарных отношений: произвольных в первом классе, предпорядков во втором и частичных порядков в третьем. Чтобы получить описание исходных (слабых) классов, надо подключить операцию прямого образа. Самый сильный класс в этом ряду, класс преференциальных гиперотношений (или ФВ Плотта, или МКМ-операторов), можно считать вершиной немонотонной логики.

Впрочем, достаточно сильными (и несравнимыми с преференциальными) выглядят и дополнительные (или кумулятивно-монотонные) гиперотношения, которые порождаются предпорядками, но другим способом.

Список литературы

[1] Strasser, Christian; Antonelli, G. Aldo. Non-monotonic Logic. Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/entries/logic-nonmonotonic/

[2] Koons, Robert. Defeasible Reasoning, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/reasoning-defeasible.

[3] Kraus S., Lehmann D., Magidor M. Nonmonotonic reasoning, preferencial models and cumulative logics. *Artif. Intell.* 44, 1-2 (1990) 167-207 (arXiv:cs/0202021v1 [cs.AI] 18 Feb 2002)

[4] Marti J., Pinosio R. A discrete duality between nonmonotonic consequence relations and convex geometries. *Order* (2020) 37, 151-171

[5] Koshevoy G.A. Choice functions and abstract convex gejmetries. *Math. Soc. Sciences* (1999) 38, 35-44

[6] Aizerman M.A., Malishevski A.V. General theory of best variants choice. *IEEE Trans. Automatic Control* (1981) AC-26(5), 1030-1040

[7] Danilov V., Koshevoy G. Choice functions and extensive operators, *Order* (2009) 26, 69-94

[8] Danilov V., Koshevoy G., Savaglio E. Hyper-relations, choice functions, and orderings of opportunity sets. *Soc. Choice Welfare*, 45, 1 (2015), 51-69

[9] Monjardet B., Raderanirina V. The duality between the anti-exchange closure operators and the path independent choice operators an a finite set. *Math. Soc. Sci.* 42, 2 (2001) 131-150

[10] Monjardet B., Raderanirina V. Lattice of choice functions and consensus problems. *Soc. Choice Welf.* 23 (2004) 349-382

[11] Plott C.R. Path independence, rationality, and social choice. *Econometrica* 41(6) (1973) 1075-1091

[12] Habib M., Nourine L. A representation theorem for lattices via set-colored posets. *Discrete Applied Mathematics*, 249, (2018) 64-73.

Сведения об авторе

Данилов Владимир Иванович, Москва, 117437, Профсоюзная 116-3-63. Место работы: Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский проспект, 47, 117418 Москва; email: vdanilov43@mail.ru.

Danilov Vladimir Ivanovich, Moscow, 117437, Profsojuznaja 116-3-63. Central Institute of Economics and Mathematics of the RAS, Nakhimovskii prospect, 47, 117416. e-mail: vdanilov43@mail.ru.

Non-monotonic logic: another typology

В работе предлагается типология систем немонотонной логики, основанная на теории функций выбора. Рассматриваются наследственные, замкнутые функции выбора и соотвествующие системы вывода, функции выбора Плотта и преференциальные системы логики, дополнительные функции выбора. Приводятся модели построения таких функций и систем. В частности, приводится модель построения любых (конечных) систем замыкания, то есть конечных решеток.

Ключевые слова: функции выбора, расширяющие операторы, операторы замыкания, независимость от пути, преференциальные системы, выпуклые геометрии.

We propose a typology of non-monotonic logic systems founded on the theory of choice functions. We consider successively hereditary choice functions, closed choice functions and corresponding inference systems, Plott choice functions and preferential logic systems, and complementary choice functions. We provide models for construction such functions and systems. In particular, we give a model for construction od any finite closure systems, that is any finite lattices.

Key words: choice functions, extensive operators, closure operators, path independence, preferential systems, convex geometry.