ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 419, № 5, с. 1–3

МАТЕМАТИКА

УДК 519.86+517.972.8

ГЛАДКИЕ ДОПУСТИМЫЕ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МОНЖА–КАНТОРОВИЧА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

© 2008 г. В. Л. Левин

Представлено академиком В.Л. Макаровым 21.11.2007 г.

Поступило 22.11.2007 г.

В этой работе даны достаточные условия существования гладких допустимых решений двойственной задачи Монжа–Канторовича (ЗМК) с фиксированной разностью маргинальных мер на открытом или замкнутом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяющем условию

$$x \in X, \quad z \in \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow x + z \in X. \tag{1}$$

На основе полученной теоремы существования развит единый метод решения разнообразных задач теории аппроксимации и математической экономики.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть X – открытое или замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию (1). С каждой функцией $c\colon X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ свяжем множества $Q_0(c)$ и $Q(c)$, где

$$Q_0(c) := \{u \in \mathbb{R}^X\colon u(x) - u(y) \le c(x, y)\ \forall x, y \in X\},$$

$$Q(c) := Q_0(c) \cap C_b(X),$$

$C_b(X)$ – пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X. $Q_0(c)$ и $Q(c)$ суть множества ограничений для двух бесконечномерных задач линейного программирования, двойственных по отношению к подходящему варианту ЗМК с функцией стоимости c и фиксированной разностью маргинальных мер; см. [1, 2].

Т е о р е м а 1. *Предположим, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty c(x + z, y + z)\eta(-z)dz_1dz_2\dots dz_n \le c(x, y), \tag{2}$$

где η – неотрицательная C^∞-гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, обращающаяся в нуль вне отрицательного ортанта $\mathbb{R}^n_-$ и нормированная условием $\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta(-z)dz_1dz_2\dots dz_n = 1$. Если существует ограниченная измеримая по Лебегу функция $u \in Q_0(c)$, то существует функция $v \in Q(c) \cap C^\infty(X)$. Более того, если $u(X) \subset (0, 1)$, то $v(X) \subset (0, 1)$, а если и u неубывающая (т.е. $x_i \le y_i$, $i = 1, \dots, n \Rightarrow u(x) \le u(y)$), то v тоже неубывающая. Наконец, если X выпукло, и вогнута (или выпукла), то найдется $v \in Q(c) \cap C^\infty(X)$ с теми же свойствами.

З а м е ч а н и е 1. Для справедливости (2) достаточно, чтобы при любых $x, y \in X$ функция на $\mathbb{R}^n_+$, $z \mapsto c(x + z, y + z)$, была невозрастающей. Для $c(x, y) = g(x - y)$ неравенство (2) очевидно выполняется со знаком равенства.

З а м е ч а н и е 2. Если $c(x, y) \ge 0$, то существование ограниченной измеримой по Лебегу функции $u \in Q_0(c)$ очевидно: можно взять $u(x) = \text{const}$. Различные нетривиальные достаточные условия существования ограниченной измеримой по Лебегу функции $u \in Q_0(c)$ см. теорему 9.2 в [1] и предложение 11 в [2] (или лемму 2 в [3]).

ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Далее $C_b(X \times X)$ – банахово пространство ограниченных непрерывных вещественных функций на $X \times X$ с равномерной нормой $\|w\|_{C_b(X \times X)} = \sup_{(x, y) \in X \times X} |w(x, y)|$, $w \in C_b(X \times X)$. Рассматривается следующая задача наилучшего приближения. Даны: замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$, векторное подпространство $H \subset C_b(X \times X)$,

$$H := \{(h_u(x, y) = u(x) - u(y)\colon u) \in C_b(X)\},$$

Центральный экономико-математический институт Российской Академии наук, Москва

и функция $f \in C_b(X \times X)$. Ищется оптимальное значение

$$m(f; H) := \inf_{u \in C_b(X)} \|f - h_u\|_{C_b(X \times X)}. \quad (3)$$

Функция $u \in C_b(X)$ называется точным решением этой задачи, если на ней достигается инфимум в (3):

$$m(f; H) = \sup_{x, y \in X} |f(x, y) - u(x) + u(y)|.$$

Положим

$$c(x, y) = \min(f(x, y), -f(y, x)). \quad (4)$$

Т е о р е м а 2. 1. *Если X удовлетворяет* (1), *а функция* (4) *удовлетворяет* (2), *то существует функция $v \in C^\infty(X)$, являющаяся точным решением задачи* (3).

2. *Функция* (4) *удовлетворяет* (2) *в каждом из следующих двух случаев*:

(а) *f неположительна и удовлетворяет* (2);

(б) *f неотрицательна и $(-f)$ удовлетворяет* (2).

Эта теорема обобщает теорему 4 в [4] и теорему 16 в [2]. В основе доказательства лежат теорема 1 и следующая

Л е м м а 1 [4]. *$m(f; H) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+: Q(c + \alpha) \neq \emptyset\}$, и функция v является точным решением* (3) *тогда и только тогда, когда $v \in Q(\varphi)$, где $\varphi(x, y) = c(x, y) + m(f; H)$.*

ПРЕДПОЧТЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Пусть X открыто либо замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Элементы X рассматриваются далее как состояния некоторой системы. Под предпочтением на X понимается произвольное бинарное отношение $\preceq$ (рефлексивность и/или транзитивность при этом не предполагаются): мы говорим, что y предпочтительнее x, если $x \preceq y$. Будем писать $x \prec y$ и говорить, что y строго предпочтительнее x, если $x \preceq y$, но $y \not\preceq x$.

Функция $u: X \to \mathbb{R}$ называется функцией полезности для $\preceq$, если для любых $x, y \in X$ справедливы импликации

$$x \preceq y \Rightarrow u(x) \le u(y),$$

$$x \prec y \Rightarrow u(x) < u(y).$$

Пусть $x, y \in X$. Обозначим через $T(y, x)$ множество всевозможных цепочек $\tau = (y = z^1 \to z^2 \to \ldots \ldots \to z^m = x)$, ведущих из y в x ($m = m(\tau)$ не фиксировано), и положим для каждой $\tau \in T(y, x)$

$$e(\tau) = \sum_{k=1}^{m} c(z^k, z^{k+1}), \quad (5)$$

где

$$c(z, z') = \begin{cases} 0 & \text{при } z \preceq z', \\ \|z - z'\| & \text{при } z \not\preceq z'. \end{cases}$$

Будем говорить, что выполнено усиленное условие ацикличности, если для любых $x \prec y$ найдется число $\delta = \delta(x, y) > 0$ такое, что $e(\tau) \ge \delta \ \forall \tau \in T(y, x)$.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что X удовлетворяет* (1), *$\preceq$ удовлетворяет усиленному условию ацикличности и условию*

$$x \preceq y \Rightarrow (x + z) \preceq (y + z) \ \ \forall z \in \mathbb{R}^n_+; \quad (6)$$

тогда для $\preceq$ существует функция полезности $v \in C^\infty(X)$, $\|\nabla v(x)\| \le 1 \ \forall x \in X$. Если к тому же $\preceq$ монотонно, т.е. $x \preceq y \Rightarrow x \le y$, то v неубывающая.

В случае, когда $\preceq$ есть предпорядок, аналогичный результат получен в [5]. Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 1 и результаты автора (см. теорему 1 в [6]) о предпочтениях, допускающих липшицевы функции полезности.

ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫБОРА

Пусть $\mathcal{M}$ – некоторое семейство непустых множеств в X, и в каждом $M \in \mathcal{M}$ выбрано непустое подмножество $\gamma(M) \subset M$.

Если существует вещественная функция u на X, такая, что для каждого $M \in \mathcal{M}$

$$\gamma(M) = \{x \in M: u(x) = \max_{y \in M} u(y)\}, \quad (7)$$

то говорят, что u рационализирует γ.

Будем говорить, что функция выбора γ удовлетворяет усиленной аксиоме выявленного предпочтения, если для любых $M \in \mathcal{M}, x \in M \gamma(M)$ и $y \in \gamma(M)$ найдется $\delta = \delta(M, x, y) > 0$, такое, что для каждой цепочки $y = y^0 \to x^1 \to y^1 \to \ldots \to x^m \to y^m \to x^{m+1} = x$ с $x^k \in M_k$, $y^k \in \gamma(M_k)$, $M_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m+1} \|y^{k-1} - x^k\| \ge \delta. \quad (8)$$

Заметим, что справедливость усиленной аксиомы выявленного предпочтения влечет за собой справедливость сильной аксиомы выявленного предпочтения Хаутеккера [7].

Т е о р е м а 4. *Предположим, что X удовлетворяет* (1) *и открыто или замкнуто, семейство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию*

$$M \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow z + M \in \mathcal{M}, \quad (9)$$

функция выбора γ удовлетворяет усиленной аксиоме выявленного предпочтения, и

$$\gamma(z + M) \supseteq z + \gamma(M), \quad M \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{R}^n_+; \qquad (10)$$

тогда существует функция $u \in C^\infty(X)$, рационализирующая γ и удовлетворяющая неравенству $\|\nabla u(x)\| \le 1$, $x \in X$.

Нам понадобятся следующие усиления условий (9) и (10):

$$\begin{gathered} M \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ z + M \subset X \Rightarrow z + M \in \mathcal{M}, \end{gathered} \qquad (11)$$

$$\begin{gathered} M \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ z + M \in \mathcal{M} \Rightarrow \gamma(z + M) = z + \gamma(M). \end{gathered} \qquad (12)$$

В связи с вопросами коллективного выбора и принятия решений при неопределенности некоторое промежуточное между (10) и (12) условие рассматривалось ранее в [8] (см. также [5]) для специального семейства $\mathcal{M}$.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что X удовлетворяет* (1), *$\mathcal{M}$ состоит из замкнутых выпуклых множеств и удовлетворяет* (11), *$\gamma(M) \ne M$ $\forall M \in \mathcal{M}$ и γ удовлетворяет* (12) *и усиленной аксиоме выявленного предпочтения; тогда каждое $\gamma(M)$ есть замкнутое выпуклое подмножество границы M и для каждого $t \in \mathbb{R}$ справедлива импликация*

$$\begin{gathered} [x, y \in \gamma(M), (1-t)x + ty \in M] \Rightarrow \\ \Rightarrow (1-t)x + ty \in \gamma(M). \end{gathered} \qquad (13)$$

Т е о р е м а 6. *Предположим, что $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ удовлетворяет* (11), *γ удовлетворяет* (12) *и усиленной аксиоме выявленного предпочтения и существует замкнутая область $M \in \mathcal{M}$ с гладкой границей, содержащей $\gamma(M)$; тогда для каждой функции* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *рационализирующей γ и удовлетворяющей* $\|\nabla u(x)\| \le 1$,[1] *найдутся вектор единичной длины $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и функция $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \le 1$, такие, что*

$$\nabla u(x) = \lambda(x) a, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

При этом a и λ однозначно определяются по u:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \|\nabla u(x)\|, \\ a &= \frac{\nabla u(x)}{\|\nabla u(x)\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \qquad (15)$$

[1] Существование таких функций следует из теоремы 4.

и линейная функция $u_1(x) = a \cdot x$ рационализирует γ.

С л е д с т в и е 1. *Предположим, что $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ удовлетворяет* (11), *γ удовлетворяет* (12) *и усиленной аксиоме выявленного предпочтения и существует замкнутое выпуклое множество $M_* \in \mathcal{M}$ с непустой внутренностью и гладкой границей.*

Тогда найдется линейная функция, рационализирующая γ.

ГЛАДКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

Напомним (см., например, 9, гл. 6), что асимметричное бинарное отношение $\succ$ на X называется интервальным порядком, если

$$(x \succ y \text{ и } x' \succ y') \Rightarrow (x \succ y' \text{ или } x' \succ y).$$

Пара (u, v) вещественных функций на X называется представлением $\succ$, если для любых $x, y \in X$ справедливо

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > v(y). \qquad (16)$$

Т е о р е м а 7. *Предположим, что X открыто или замкнуто и удовлетворяет* (1), *$\succ$ есть интервальный порядок на X, удовлетворяющий условию: $x \succ y \Leftrightarrow (x+z) \succ (y+z)$ при каждом $z \in \mathbb{R}^n_+$. Если (u, v) – представление $\succ$ и обе функции измеримы по Лебегу, то существует представление $\succ$, (u_1, v_1), для которого $u_1, v_1 \in C^\infty(X)$, $u_1(X) \subset (0, 1)$, $v_1(X) \subset (0, 1)$.*

Работа поддержана Программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-6417.2006.6) и РФФИ (проект 07-01-00048).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Levin V.L.* In: Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. A Collection of Papers Dedicated to Memory of L.V. Kantorovich. N.Y.; Oxford: Oxford Univ. Press, 1990. P. 141–176.
2. *Levin V.L.* In: Generalized Convexity and Related Topics // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. 2006. V. 583. P. 33–72.
3. *Левин В.Л.* // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1694–1709.
4. *Левин В.Л.* // Мат. сб. 2006. Т. 197. № 9. С. 103–114.
5. *Levin V.L.* // Adv. Math. Econ. 2008. V. 10. In press.
6. *Levin V.L.* // J. Math. Econ. 1991. V. 20. P. 69–87.
7. *Houthakker H.S.* // Economica. 1950. V. 17. P. 159–174.
8. *Neuefeind W., Trockel W.* // Econ. Theory. 1995. V. 6. P. 351–356.
9. *Bridges D.S., Mehta G.B.* Representations of Preference Orderings // Lect. Notes Econ. and Meth. Sys. 1995. V. 422.