English translation: "Gross substitutability mappings in economic equilibrium theory"

published in Journal of Mathematical Sciences, 26-4, 1984, pp. 2013-2047

УДК 519.86

ОТОБРАЖЕНИЯ С ВАЛОВОЙ ЗАМЕНИМОСТЬЮ В ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В. М. Полтерович, В. А. Спивак

Отображения, обладающие свойством валовой заменимости, встречаются во многих разделах математической экономики, в теории многосвязного регулирования, а также в связи с рядом других проблем. Соответствующая литература весьма обширна. Настоящий обзор охватывает, в основном, работы, опубликованные после 1965 года и ориентированные на изучение экономического равновесия. Более ранние результаты здесь отражены лишь частично, значительную их часть можно найти в монографиях [36, 10, 19, 20].

Существенная особенность настоящего изложения — систематическое рассмотрение многозначных отображений с валовой заменимостью, недавно введенных в [26, 28, 57]. Благодаря этому, удалось включить в общую теорию линейные модели, требовавшие ранее разработки специальных методов.

В статье используется следующая система обозначений. Если X — множество, то 2^X — система всех его подмножеств; $\operatorname{int} X$ — внутренность X. $\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{R}_+^n$, $\mathbf{R}_-^n$ — множества векторов в $\mathbf{R}^n$ с неотрицательными и неположительными координатами соответственно; $x = (x_i)$ — вектор с координатами x_i, его размерность оговаривается в каждом случае. Если $x, y \in \mathbf{R}^n$, то через xy обозначается их скалярное произведение. Но если α — скаляр, то αx — произведение вектора на число. Если $M = \{1, \ldots, m\}$ — множество целых чисел от 1 до m и $d^k \in \mathbf{R}^n$, то символ $(d^k, k \in M)$ обозначает естественно упорядоченную систему векторов.

Определения, теоремы, формулы и т. п., а также разделы параграфов (пункты) обозначаются в работе двойной нумерацией: первое число соответствует номеру параграфа, второе — номеру внутри параграфа.

§ 1. Определения, примеры, основные предположения

1.1. Начнем с определения основных понятий. Пусть $P \subset \mathbf{R}^n$ и функция $\mathscr{D} = (\mathscr{D}_i)$ сопоставляет каждому вектору $p \in P$ некоторый вектор $\mathscr{D}(p) \in \mathbf{R}^n$.

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $\mathscr{D}$ обладает свойством валовой заменимости (в. з.), и называть ее GS-функцией*, если $\mathscr{D}_i(p)$ не убывает по p_j при любых i, j, $i \neq j$.

Определение 1.2. Если $\mathscr{D}_i(p)$ возрастает по $p_j \forall i$, j, $i \neq j$, то $\mathscr{D}$ удовлетворяет условию строгой валовой заменимости и называется строгой GS-функцией.

Иногда говорят о строгой валовой заменимости в дифференциальной форме, имея в виду условие

$$\frac{\partial \mathscr{D}_i(p)}{\partial p_j} > 0 \ \forall i, j, \quad i \neq j \text{ и } \forall p \in P. \tag{1.1}$$

Пусть $p \in P$, $q \in P$, $N = \{1, \ldots, n\}$. Введем обозначение

$$I(p, q) = \{i \mid p_i = q_i, \ i \in N\}. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. GS-функция называется неразложимой, если для любых $p \in P$, $q \in P$ из условия $p \leqslant q$ следует неравенство

$$\min_{i \in I(p,q)} (\mathscr{D}_i(p) - \mathscr{D}_i(q)) < 0.$$

Понятие заменимых благ было введено Хиксом [56], а термин «валовая заменимость» — Мосаком [68]. Однако единая терминология до сих пор не установилась. Иногда валовой заменимостью (в. з.) называют свойство, указанное в определении 1.2, а вместо в. з. в смысле определения 1.1 используют термин «слабая валовая заменимость». Строгую валовую заменимость называют также сильной. Встречаются и другие варианты.

Происхождение термина «валовая заменимость» связано с интерпретацией $\mathscr{D}$ как функции спроса, зависящей от вектора цен p. Это свойство заведомо имеет место, если все товары взаимозаменяемы для потребителей; тогда с повышением цены на одно благо спрос на все остальные не уменьшается**. Разумеется, так бывает далеко не всегда. В теории потребления, наряду с заменимостью, выделяют также эффект дополнительности (комплементарности) благ (см. § 7). Так, масло и маргарин являются примерами заменимых продуктов, а бензин и автомобили — дополнительных.

Хотя свойство валовой заменимости не универсально, его изучению посвящено большое число работ. Это объясняется

* От английского gross substitute; отметим, что обозначения функции через $\mathscr{D}$ и ее аргумента через p происходят от английских слов «demand» («спрос») и «price» («цена») и связаны с интересующей нас областью приложений.

** Разъяснение термина «валовой» см. ниже п. 1.2.

рядом причин. Во-первых, валовая заменимость все же встречается довольно часто (см. п. 1.2). Во-вторых результаты, касающиеся систем с валовой заменимостью, находят применение и при изучении комплементарных благ и «смешанных» систем (§ 7). В-третьих, это свойство в сочетании с некоторыми другими предположениями обеспечивает «правильное» (т. е. соответствующее экономической интуиции) поведение системы. Для моделей с валовой заменимостью удается доказать выпуклость множества равновесных цен или даже их единственность (§§ 2, 3), выяснить, как будет меняться равновесие при изменении тех или иных экзогенных параметров (§ 4), установить сходимость процессов регулирования цен (§ 6) и т. п. К тому же до сих пор не ясно, можно ли получить одновременно все эти результаты для более широкого класса ситуаций.

В ряде важных случаев (см. п. 1.2) спрос неоднозначно определяется вектором цен. Поэтому в [26, 28] было предложено следующее обобщение понятия валовой заменимости.

Пусть $P\subset\mathbf{R}^n$ и отображение $\mathscr{D}$ сопоставляет каждому вектору $p\in P$ некоторое множество $\mathscr{D}(p)\subset\mathbf{R}^n$.

Определение 1. 4. Отображение $\mathscr{D}$ обладает свойством валовой заменимости и называется GS-отображением, если для любых векторов p, q из P таких, что $p\leqslant q$ и $I(p, q)\neq\varnothing$ (см. (1.2), и для любых $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$, $f=(f_i)\in\mathscr{D}(q)$ выполняется условие

$$\min_{i\in I(p,q)}(d_i-f_i)\leqslant 0. \tag{1.3}$$

Если, сверх того, при $p\neq q$ в (1.3) имеет место строгое неравенство, то GS-отображение называется неразложимым.

Легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Предложение 1.1. Пусть $\mathscr{D}$ — однозначная функция. Если $\mathscr{D}$ удовлетворяет определению 1.1, то она является GS-отображением в смысле определения 1.4. Обратно, если $\mathscr{D}$ непрерывна, определена на открытом множестве P и является GS-отображением, то она обладает свойством валовой заменимости в смысле определения 1.1.

Аналогичным образом связаны определение 1.3 и понятие неразложимого GS-отображения.

Несколько ниже (см. пример 1.1) будет показано, что условие непрерывности во второй части предложения 1.1 нельзя отбросить. Таким образом, однозначное GS-отображение и GS-функция — неэквивалентные понятия.

Свойство валовой заменимости в многозначном случае, вообще говоря, не аддитивно (см. пример 1.2). Однако GS-отображения, возникающие во многих моделях равновесия, принадлежат некоторому подклассу, замкнутому относительно алгебраического сложения. Этот подкласс заслуживает специального определения.

Определение 1.5 [26]. Будем говорить, что $\mathscr{D}$ является AGS-отображением, если для любых векторов $p=(p_i)$, $q=(q_i)$ из P, удовлетворяющих условиям $p\leqslant q$, $I(p,q)\neq\varnothing$, и для любых $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$, $f=(f_i)\in\mathscr{D}(q)$ выполнено соотношение

$$\sum_{i\in I(p,q)} p_i d_i \leqslant \sum_{i\in I(p,q)} q_i f_i. \tag{1.4}$$

Если, сверх того, при $p\neq q$ в (1.4) имеет место строгое неравенство, то AGS-отображение назовем неразложимым.

Независимо от [26, 28], Ховитт [57] ввел класс отображений, промежуточный между классами AGS и неразложимых AGS-отображений.

Если $P\subset \operatorname{int} \mathbf{R}_+^n$, то (неразложимое) AGS-отображение является очевидно (неразложимым) GS-отображением.

Понятия GS- и AGS-отображения имеют естественную экономическую интерпретацию.

Пусть $\mathscr{D}(p)$ — совокупность возможных векторов спроса при ценах p; предположим, что цены на некоторые продукты выросли до уровня q_i, $i\notin I(p,q)$. Тогда (1.3) означает, что при любых возможных реализациях спроса в точках p и q найдется продукт с неизменной ценой, спрос на который не уменьшится, а неравенство (1.4) означает, что при этом затраты на приобретение всех продуктов с неизменившимися ценами не убывают.

В дальнейшем нам потребуется следующее понятие, рассматривавшееся в [27] (см. также [1]).

Определение 1.6. Отображение $\mathscr{F}: P\to 2^{\mathbf{R}^n}$, $P\subset\mathbf{R}^l$, не убывает, если для любых векторов p, q, d, f таких, что $p\in P$, $q\in P$, $p\leqslant q$, $d\in\mathscr{F}(p)$, $f\in\mathscr{F}(q)$, найдутся векторы $d'\in\mathscr{F}(p)$, $f'\in\mathscr{F}(q)$, удовлетворяющие неравенствам

$$d\leqslant f',\ f\geqslant d'. \tag{1.5}$$

Если при этом для $p\neq q$ неравенства в (1.5) можно считать строгими, то $\mathscr{F}$ возрастает.

Будем говорить, что $\mathscr{F}$ не возрастает (убывает), если отображение $(-\mathscr{F})$ не убывает (возрастает).

Определение 1.7. Отображение $\mathscr{F}: P\to 2^{\mathbf{R}^n}$, $P\subset\mathbf{R}^l$, назовем нормальным (строго нормальным), если при любом $p\in P$ отображение $\Phi_p(\lambda)=\mathscr{F}(\lambda p)$ не убывает (возрастает).

1.2. Примеры GS-отображений. В теории равновесия обычно предполагается, что каждый потребитель (или каждая группа потребителей) характеризуется целевой функцией и $u(x)$ (x — n-мерный вектор потребительских благ), а значение его функции спроса является решением задачи максимизации $u(x)$ при бюджетном ограничении

$$u(x) \to \max, \quad px \leqslant \beta, \quad x \geqslant 0, \tag{1.6}$$

где β — доход потребителя.

Обозначим через $\mathscr{C}(p, \beta)$ множество решений задачи (1.6). Наша ближайшая цель состоит в изложении условий, обеспечивающих валовую заменимость $\mathscr{C}(p, \beta)$ при $P = \operatorname{int} R_+^n$ и фиксированном $\beta > 0$ (случай $\beta = 0$ очевиден). Поскольку $\mathscr{C}(p, \beta)$ положительно однородно, валовую заменимость достаточно проверить для $\beta = 1$.

Согласно уравнению Слуцкого [30, стр. 255], каждая из производных $\partial \mathscr{C}_i / \partial p_j$ является суммой двух слагаемых, отражающих «эффект дохода» и «эффект замещения». Эффект замещения возникает вследствие одновременных вариаций цены и дохода, оставляющих уровень максимальной полезности неизменным. В отличие от этого, валовая заменимость является результатом обоих эффектов, что и подчеркивается самим термином, введенным в [68] (обсуждение см. также в [20, стр. 390]).

Зная матрицу Гессе функции u, можно вычислить величины $\partial \mathscr{C}_i / \partial p_j$ [30]; таким образом, для гладкой u получаются необходимые и достаточные условия валовой заменимости. Условия эти громоздки и пользование ими затруднено. Однако в частном случае, когда

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i), \tag{1.7}$$

можно указать следующий простой критерий, пригодный и тогда, когда доход потребителя зависит от цен.

Теорема 1. 1. *Пусть функция (1.7) не достигает максимума на R_+^n, $u_i(x_i)$ непрерывны и вогнуты, а $u_i'(x_i) x_i$ определены* при $x_i > 0$ и не убывают для всех i. Предположим также, что функция $\delta(p)$ не убывает и неотрицательна на $\operatorname{int} \mathrm{R}_+^n$. Тогда $\mathscr{F}(p) = \mathscr{C}(p, \delta(p))$ является AGS-отображением на $\operatorname{int} R_+^n$.*

Это утверждение следует непосредственно из результатов Слуцкого [30], если $\delta(p) = 1$, u дважды непрерывно дифференцируема, и строго вогнута, а $\mathscr{C}(p, 1) > 0$ при всех $p > 0$. При этом $\mathscr{C}(p, 1)$ — строгая GS-функция. В [18] было замечено, что если отказаться от строгой положительности, то $\mathscr{C}(p, 1)$ остается GS-функцией, хотя уже необязательно строгой. Для линейных u теорема 1.1 доказана в [26] (см. также [57]). Приведенная формулировка включает случай многозначного спроса при нелинейной u.

---

* Вогнутость означает, что $u(tx + (1-t)y) \geqslant tu(x) + (1-t)u(y)$, $0 < t \leqslant 1$, $x, y \in \mathrm{R}_+^n$. Через u_i' обозначена производная u_i.

Доказательство теоремы 1.1 следует из анализа условий оптимальности для задачи (1.6). Аналогичным образом можно показать, что если в дополнении к условиям теоремы 1.1 функции $u_i'(x_i)x_i$ строго возрастают и $\mathcal{F}(p)\subset \operatorname{int} R_+^n$ для всех $p>0$, то AGS-отображение $\mathcal{F}(p)$ неразложимо.

Согласно теореме 1.1, целевые функции вида $u(x)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i^{\alpha_i}$, где $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$, $\mu_i\geqslant 0$, $\max_{i=1,\ldots,n}\mu_i\alpha_i>0$, порождают спрос, являющийся AGS-отображением. Если $u_i'(x_i)\to+\infty$ при $x_i\to+0\,\forall i$, то $\mathscr{C}(p,\delta(p))$ неразложимо.

Приведем еще два примера из [26], иллюстрирующих соотношения между введенными выше понятиями.

Пример 1.1. Однозначное разрывное GS-отображение (в смысле определения 1.4) может не удовлетворять определению 1.1. Пусть отображение $\mathscr{C}(p,1)$ порождено задачей (1.6) при $u(x)=\sum_{i=1}^{3}x_i$ и $\delta(p)\equiv 1$. Чтобы получить искомый пример достаточно рассмотреть функцию $\mathcal{F}(p)\in\mathscr{C}(p,1)$, подчинив выбор представителя двум условиям: $\mathcal{F}(1,1,1)=(0,0,1)$ и $\mathcal{F}(2,1,1)=(0,1,0)$.

Пример 1.2. Сумма двух GS-отображений может не быть GS-отображением. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть множества решений двух экстремальных задач

$$x_1+2x_2+x_3\to\max,\quad p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3\leqslant 16,\quad x_i\geqslant 0;$$

$$x_1+x_2+x_3\to\max,\quad p_1x_1+p_2x_2+2p_3x_3\leqslant 16,\quad x_i\geqslant 0$$

при $p=(2,2,1)$ и $p=(3,2,1)$.

Отметим, что вторая из приведенных задач порождает GS-отображение, не являющееся AGS-отображением; другой пример можно получить из [25, лемма 1].

В [33] указаны некоторые классы функций полезности (гладких, но не обязательно представимых в виде (1.7)), для которых $\mathscr{C}(p,1)$ является GS-функцией. Там же даны примеры производственных систем, функция предложения которых, взятая с обратным знаком, удовлетворяет определению 1.1.

1.3. Для теории равновесия важное значение имеет случай линейной зависимости дохода от цен: $\delta(p)=pw$, где $w\in R_+^n$ (pw — стоимость ресурсов w, которыми располагает участник). Преобразуя уравнение Слуцкого, Фишер [48] получил необходимые и достаточные условия (в терминах $\mathscr{C}(p,\beta)$), обеспечивающие в. з. $\mathscr{C}(p,pw)$ при любых $w\in R_+^n$. Эти условия представляют собой соотношения между эластичностями спроса по доходу, эластичностями замещения между товарами по Аллену—Узаве и величинами $p_i\mathscr{C}_i/\beta$. Их проверка требует громоздких выкладок.

Связь между валовой заменимостью отображений $\mathscr{C}(p, \beta)$ и $\mathscr{C}(p, pw)$ становится более прозрачной, если $\mathscr{C}(p, 1)$ нормально. В силу положительной однородности $\mathscr{C}(p, \beta)$ по (p, β), нормальность $\mathscr{C}(p, 1)$ означает неубывание $\mathscr{C}(p, \beta)$ по доходу при любом фиксированном p.

Для однозначных функций спроса свойство нормальности исследовалось еще Е. Е. Слуцким [30], который установил, что если функция полезности имеет вид (1.7), причем $u_i'>0$, $u_i''<<0$, то порождаемый ею спрос строго нормален. Очевидно, линейная целевая функция порождает нормальный (но не строго нормальный) спрос.

Следующее утверждение было указано в [48] для однозначного случая, а затем обобщено в [27].

Предложение 1.2. Если $\mathscr{C}(p, pw)$ является GS-отображением на $\operatorname{int} R_+^n$ при любых $w \geqslant 0$, то $\mathscr{C}(p, 1)$ также является GS-отображением. Обратно, если $\mathscr{C}(p, \beta)$ положительно однородно нулевой степени по (p, β) и нормально, то из валовой заменимости $\mathscr{C}(p, 1)$ следует валовая заменимость $\mathscr{C}(p, pw)$, а неразложимость $\mathscr{C}(p, 1)$ влечет за собой неразложимость $\mathscr{C}(p, pw)$ для всякого $w \geqslant 0$, $w \neq 0$.

1.4. Задача изучения GS-отображений возникает также в связи с моделями межотраслевого баланса, имеющими важное прикладное значение. Эти модели стимулировали интенсивное изучение матриц с неотрицательными внедиагональными элементами — так называемых матриц Метцлера. Их теория подробно изложена, например, в [20].

Если $\varphi(p)$ — неубывающая вектор-функция и $\lambda \in R_+^1$, то $\varphi(p) - \lambda p$ обладает свойством валовой заменимости. Поэтому задача об отыскании неотрицательных собственных векторов монотонного оператора в R^n тесно связана с отысканием нулей GS-функции (векторов, обращающих ее в нуль). Такие задачи типичны для моделей нелинейного межотраслевого баланса [1, 3, 4, 6, 7].

1.5. Примеры моделей равновесия. В дальнейшем, наряду с изучением свойств GS-отображений, в абстрактной форме будут рассматриваться две сравнительно простые модели равновесия, исследованию которых посвящено большое число работ (значение подобных моделей для теории плановой экономики обсуждается, например, в [8, 1]).

Пусть каждый из m агентов (потребителей) характеризуется целевой функцией $u_k: R_+^n \to R^1$ и функцией дохода $\delta_k: R_+^n \to \to R_+^1$, $k \in M = \{1, \ldots, m\}$. Обозначим через $\mathscr{C}^k$ отображение, сопоставляющее каждой паре p, $\delta_k(p)$ множество решений задачи (1.6) при $u = u_k$, $\beta = \delta_k(p)$. Тогда отображение $\mathscr{C}^k(p, \delta_k(p))$ характеризует зависимость спроса k-го участника от цен p. Предположим, что вектор предложения $s \in R_+^n$ фиксирован.

Определение 1.8. Набор векторов $(q, f^k, k\in M)$ называют равновесием, если $q\in R_+^n$, $f^k\in\mathscr{C}^k(q, \delta_k(q))\ \forall k\in M$ и $\sum\limits_{k\in M} f^k = s$. При этом q называют вектором равновесных цен, а набор $(f^k, k\in M)$ — равновесным распределением ресурсов.

Если $\delta_k(p) = pw^k$, где $w^k\in R_+^n$, а $s = \sum\limits_{k=1}^{m} w^k$, то получаем модель чистого обмена [20, 36]. Обозначим ее через $\mathfrak{M}_1(W)$, где $W = (w^k, k\in M)$ — набор начальных запасов. Если $\delta_k(p)\equiv\beta_k$, то описанная конструкция называется моделью с фиксированными доходами и обозначается через $\mathfrak{M}_2(B, s)$, где $B = (\beta_k)\in R_+^m$.

Рассмотрим отображение (избыточный спрос)

$$\mathscr{D}(p) = \sum_{k=1}^{m}\mathscr{C}^k(p, \delta_k(p)) - s. \tag{1.8}$$

Ясно, что множество равновесных цен совпадает со множеством

$$\mathscr{D}^0 = \{p\mid 0\in\mathscr{D}(p)\}. \tag{1.9}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что описанная модель удовлетворяет следующим двум условиям.

$U1$. Каждая целевая функция определена на R_+^n, непрерывна, строго квазивогнута* и не достигает максимума на R_+^n.

$U2$. Для любого продукта i найдется участник k, целевая функция которого строго возрастает по i-ой переменной.

Из $U2$ следует, что отображение $\mathscr{D}(p)$ не определено на границе R_+^n.

Вопрос о структуре множества $\mathscr{D}^0$ для GS-отображения $\mathscr{D}$ будет обсуждаться в следующих параграфах.

В более общих моделях равновесия [10, 20, 36] предложение также зависит от цен. Многие излагаемые далее результаты справедливы и в этом случае.

Отметим, что если все целевые функции удовлетворяют $U1$, то для избыточного спроса в модели $\mathfrak{M}_1$ выполняется тождество

$$pd = 0\ \forall d\in\mathscr{D}(p),\ \forall p, \tag{1.10}$$

называемое законом Вальраса. В модели $\mathfrak{M}_2$ закон Вальраса не имеет места, но справедливо соотношение

$$pd = \sum_{k=1}^{m}\beta_k - ps\ \ \forall d\in\mathscr{D}(p),\ \forall p.. \tag{1.11}$$

Заметим, что модель $\mathfrak{M}_2(B, s)$ можно рассматривать, как частный случай модели $\mathfrak{M}_1(W)$. Действительно, при $w^k =$

---

* Т. е. $u(tx+(1-t)y)\geqslant\min\{u(x), u(y)\}\ \forall t\in(0, 1)$, причем имеет место строгое неравенство, если $u(x)\neq u(y)$. Если u вогнута (см. примечание на стр. 115), то она и строго квазивогнута.

$=\frac{1}{\sum_r \beta_r}\beta_k s$, $W=(w^k, k\in M)$ множество равновесий в $\mathfrak{M}_1(W)$ совпадает со множеством равновесий в $\mathfrak{M}_2(B, s)$, если в $\mathfrak{M}_1$ нормировать цены: $ps=\sum_k \beta_k$. Модель $\mathfrak{M}_2$ интересна сама по себе, но, кроме того, она играет важную вспомогательную роль при изучении более сложной модели $\mathfrak{M}_1$.

1.6. Введем теперь некоторые предположения, которые будут использоваться в дальнейшем применительно к различным отображениям.

A1. Отображение определено на $\mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$, выпуклозначно, замкнуто и переводит любой компакт, принадлежащий $\mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$, в непустое ограниченное множество пространства $\mathbf{R}^n$.

A2. Отображение положительно однородно степени α.

A3. Если q является нулем отображения, а $d=(d_i)$ принадлежит образу p, $d\neq 0$, то из условия $p\geqslant q$ следует, что $\min_i d_i<0$, а неравенство $p\leqslant q$ влечет за собой $\max_i d_i>0$.

A4. Отображение удовлетворяет тождеству Вальраса

$$pd=0 \ \forall d\in\mathscr{D}(p),\ \forall p.$$

Легко видеть, что из A4 следует A3. Пусть справедливо $U1$. Тогда для избыточного спроса $\mathscr{D}$ в модели $\mathfrak{M}_1$ выполнены все условия A1—A4 (причем A2 имеет место при $\alpha=0$). Избыточный спрос в $\mathfrak{M}_2$ обладает свойствами A1 и A3, но A2 и A4 нарушаются.

1.7. В заключение этого параграфа приведем теорему из [26], устанавливающую связь между GS- и AGS-отображениями.

Теорема 1.2. Для того чтобы (неразложимое) GS-отображение $\mathscr{D}$, удовлетворяющее A1, являлось (неразложимым) AGS-отображением, необходимо и достаточно, чтобы для любого p и произвольных представителей d, d' множества $\mathscr{D}(p)$ выполнялось равенство $pd=pd'$.

Обоснование теоремы 1.2, данное в [26], опирается на две леммы, которые будут полезны в дальнейшем.

Лемма 1.1. Пусть V — выпуклый компакт из $\mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$ и отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1. Тогда существует пара векторов r, h таких, что $r\in V$, $h\in\mathscr{D}(r)$ и $rh\geqslant vh$ $\forall v\in V$.

Для доказательства достаточно применить теорему Какутани о неподвижной точке к прямому произведению $\mathscr{P}(d)\times\times\mathscr{D}(p)$, где $\mathscr{P}(d)=\{p\,|\,p\in V,\ pd=\max_{v\in V} vd\}$.

Пусть $p=(p_i)$, $q=(q_i)$. Следующие обозначения будут использоваться на протяжении всей статьи.

$$\min\{p, q\}=(\bar{p}_i),\ \text{где}\ \bar{p}_i=\min\{p_i, q_i\},\qquad \max\{p, q\}=(\bar{\bar{p}}_i),\ \text{где}\ \bar{\bar{p}}_i=\max\{p_i, q_i\}. \tag{1.12}$$

$$J_1(p, q)=\{i\,|\,p_i<q_i\},\quad J_2(p, q)=\{i\,|\,p_i\geqslant q_i\}. \tag{1.13}$$

Если $a=(a_i)\in R^n$ и $J\subset N=\{1,\ldots,n\}$, то $a[J]$ — это n-мерный вектор с координатами

$$a_i[J]=\begin{cases} a_i, & i\in J,\\ 0, & i\notin J.\end{cases} \qquad (1.14)$$

Следующий результат является важным инструментом при исследовании свойств GS-отображений и в дальнейшем используется многократно.

Лемма 1.2. (о комбинировании). Пусть GS-отображение удовлетворяет A1 и $d\in\mathcal{D}(p)$, $f\in\mathcal{D}(q)$, $\bar{p}=\min\{p, q\}$, $\bar{\bar{p}}=\max\{p, q\}$. Тогда найдутся векторы $\bar{a}\in\mathcal{D}(\bar{p})$, $\bar{\bar{a}}\in\mathcal{D}(\bar{\bar{p}})$ такие, что

$$\bar{a}\leqslant d[J_1]+f[J_2],\quad \bar{\bar{a}}\geqslant d[J_2]+f[J_1],$$

где $J_1=J_1(p, q)$, $J_2=J_2(p, q)$.

Доказательство, опирающееся на лемму 1.1, приведено в [26]. Оно близко к обоснованию теоремы 2 в [28].

§ 2. МНОЖЕСТВА РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН

2.1. Рассмотрим отображение $\mathcal{D}: P\to 2^{R^n}$, $P\subset R_+^n$, и обозначим

$$\mathcal{D}^0=\{p\mid 0\in\mathcal{D}(p)\}. \qquad (2.1)$$

Векторы из $\mathcal{D}^0$ будем называть нулями отображения $\mathcal{D}$ или, если $\mathcal{D}$ интерпретируется как избыточный спрос, векторами равновесных цен. В этом параграфе будут приведены условия, при которых $\mathcal{D}^0$ не пусто и выпукло или содержит единственный элемент. Будет рассмотрен также близкий вопрос о существовании и свойствах обратного отображения

$$\mathcal{D}^{-1}(y)=\{p\mid y\in\mathcal{D}(p)\},\quad y\in Y\subset R^n. \qquad (2.2)$$

Для линейной GS-функции $\mathcal{D}$ при $P=R_+^n$, $Y=R_-^n$ известны необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{D}^{-1}$ (см., например, [20, стр. 126]; такие функции задаются матрицами Метцлера [10, стр. 299]).

Пусть теперь $\hat{P}=\{p\mid \hat{p}\leqslant p\leqslant\hat{q}\}$, $\mathcal{D}(p)=\varphi(p)-p$, где $\varphi: R^n\to R^n$, φ не убывает. Допустим, что $\mathcal{D}(\hat{p})\geqslant 0$, $\mathcal{D}(\hat{q})\leqslant 0$. Тогда $\hat{P}\cap\mathcal{D}^0\neq\varnothing$ по теореме Биркгофа — Тарского (формулировку см., например, в [21, стр. 53], а ее вариации — в приложении к [1]). Это утверждение сохраняет силу для произвольной непрерывной GS-функции [79, 92]. При $\hat{p}\in\operatorname{int} R_+^n$ его можно обобщить на многозначный случай, используя леммы 1.1 и 1.2. Обозначим

$$\mathcal{D}^+=\{p\mid\mathcal{D}(p)\cap R_+^n\neq\varnothing\},\quad \mathcal{D}^-=\{p\mid\mathcal{D}(p)\cap R_-^n\neq\varnothing\}. \qquad (2.3)$$

Теорема 2.1. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1 и $\mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}^- = \mathscr{D}^0$. Если $\hat{p} \in \mathscr{D}^+$, $\hat{q} \in \mathscr{D}^-$, $\hat{p} \leqslant \hat{q}$, то $\mathscr{D}^0 \neq \varnothing$ и найдется вектор $r \in \mathscr{D}^0$, $\hat{p} \leqslant r \leqslant \hat{q}$.

Отметим, что для AGS-отображений, определенных на $P = \operatorname{int} R_+^n$, всегда $\mathscr{D}^+ \cap \mathscr{D}^- = \mathscr{D}^0$. Близкий результат содержится в [27].

2.2. Пусть теперь $\mathscr{D}$ удовлетворяет тождеству Вальраса А4. Если $P \subset \operatorname{int} R_+^n$, то, очевидно, $\mathscr{D}^+ = \mathscr{D}^- = \mathscr{D}^0$ и утверждение теоремы 2.1 оказывается тривиальным. Отметим, что на всем R_+^n не существует отличной от нуля непрерывной GS-функции, удовлетворяющей А4 (см., например, [20, стр. 417]). В [20, § 18.2], [59] сформулирован ряд теорем существования равновесных цен для непрерывной положительно однородной GS-функции, подчиненной А4 и заданной на конусе $P \subset R_+^n$ (необязательно выпуклом), не содержащем нуля и замкнутом в относительной топологии R_+^n. При этом предполагается выполнение определенных условий на границе P.

Пусть $P = \operatorname{int} R_+^n$ и $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A4. Тогда существование равновесного вектора можно доказать, не используя валовую заменимость, при следующем естественном граничном условии (фактически оно использовалось в [20]): найдутся константы $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что если $\|p\| \geqslant \gamma$, $T = \{i \mid p_i \leqslant \varepsilon\} \neq \varnothing$, то любой вектор $d \in \mathscr{D}(p)$ имеет хотя бы одну положительную координату с номером из T. Это утверждение легко вывести из леммы 1.1. Оно применимо к модели $\mathfrak{M}_1(W)$ если верны $U1$, $U2$ и для любых i, $j = 1, \ldots, n$ найдется участник, владеющий i-ым продуктом, целевая функция которого строго возрастает по j-ой переменной.

Необходимые и достаточные условия существования равновесия известны лишь для линейных моделей чистого обмена [50]. Пока неясно, как распространить их на нелинейный случай даже в условиях валовой заменимости.

2.3. Перейдем теперь к обсуждению результатов о единственности нуля и существовании обратного отображения. Вначале рассмотрим ситуации, несвязанные с выполнением А2 и А4.

Для дифференцируемой GS-функции $\mathscr{D}$, определенной в области вида $P = \{p \mid \hat{p} < q < \hat{q}\}$, Гейл и Никайдо [51], [20, стр. 475] получили необходимое и достаточное условие, обеспечивающее одновременно существование и неубывание обратной функции: в любой точке из P якобиева матрица $\mathscr{D}'$ функции $\mathscr{D}$ должна удовлетворять неравенствам

$$\max_i a_i b_i > 0 \quad \forall a = (a_i) \in R^n \text{ и } b = (b_i) = \mathscr{D}' a. \tag{2.4}$$

В работах [78—80, 84, 89] указаны условия, гарантирующие существование и однозначность обратной к GS-функции без предположения гладкости. Наиболее общие (и весьма похожие) результаты получены независимо Сэндбергом [79] и

Яном [89]. Ниже будет доказано утверждение, близкое к теореме 3 из [79], но применимое и для многозначного случая.

Введем еще одно предположение, более слабое, чем A4.

A5. Если $d\in\mathscr{D}(p)$, $d'\in\mathscr{D}(p)$ при некотором p и $d\leqslant d'$, то $d=d'$.

Для AGS-отображения (определение 1.5) A5 выполняется автоматически при положительных p.

Фиксируем множество $Y\subset R^n$.

Теорема 2.2. Предположим, что GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A5 и выполнено следующее требование:

(*) для любых $r\in\mathrm{int}\,\mathrm{R}_+^n$, $y\in Y$ найдутся p, q, d, f такие, что $p\leqslant r\leqslant q$, $d\in\mathscr{D}(p)$, $f\in\mathscr{D}(q)$, $d\geqslant y\geqslant f$.

Тогда на Y определено невозрастающее обратное отображение $\mathscr{D}^{-1}$. Одно однозначно, когда имеет место условие:

(**) если $d\in\mathscr{D}(p)$, $f\in\mathscr{D}(q)$, $q\geqslant p$, $f\geqslant d$, то $q=p$.

Если (**) не выполняется для некоторых p, q, d, f, причем $d\in Y$ или $f\in Y$, то $\mathscr{D}^{-1}$ неоднозначно.

Доказательство теоремы 2.2 опирается на следующую лемму из [26].

Лемма 2.1. Если GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, то множество $\mathscr{D}^+$ (см. (2.3)) замкнуто относительно операции max, а $\mathscr{D}^-$ — относительно операции min. Если, кроме того, выполнено A3, то $\mathscr{D}^0$ замкнуто относительно max и min.

Лемма 2.1 легко следует из леммы 1.2 о комбинировании.

Доказательство теоремы 2.2. По теореме 2.1 отображение $\mathscr{D}(p)-y$ имеет нуль при любом $y\in Y$; следовательно, $\mathscr{D}^{-1}$ определено. Пусть $a, b\in Y$, $a\leqslant b$, $r\in\mathscr{D}^{-1}(a)$, $v\in\mathscr{D}^{-1}(b)$. Положим

$$\bar{p}=\min\{r, v\},\quad \bar{\bar{p}}=\max\{r, v\},\quad \mathscr{F}(p)=\mathscr{D}(p)-b. \tag{2.5}$$

Применяя лемму 2.1 к отображению $\mathscr{F}(p)$, найдем $\bar{g}\in\mathscr{F}(\bar{p})$, $\bar{g}\leqslant 0$. По условию найдем векторы q, f такие, что $f\in\mathscr{D}(q)$, $q\leqslant\bar{p}$, $f\geqslant b$. По теореме 2.1 множество $\{p\,|\,q\leqslant p\leqslant\bar{p}\}$ содержит вектор v', для которого $0\in\mathscr{F}(v')$; следовательно, $v'\leqslant r$, $v'\in\mathscr{D}^{-1}(b)$. Точно так же найдем $r'\in\mathscr{D}^{-1}(a)$, $r'\geqslant v$. Неубывание $\mathscr{D}^{-1}$ доказано.

Предположим теперь, что $r\in\mathscr{D}^{-1}(b)$, $v\in\mathscr{D}^{-1}(b)$, $b\in Y$, $r\neq v$. Рассмотрим $\bar{p}$, $\bar{\bar{p}}$ и $\mathscr{F}(p)$, определенные в (2.5). Применяя к $\mathscr{F}(p)$ лемму 2.1, найдем $\bar{a}\in\mathscr{D}(\bar{p})$, $\bar{\bar{a}}\in\mathscr{D}(\bar{\bar{p}})$, $\bar{a}\leqslant b\leqslant\bar{\bar{a}}$. Но $\bar{p}\leqslant\bar{\bar{p}}$, следовательно, условие (**) не выполняется. Обратно, пусть (**) не выполняется для некоторых r, v, a, b, так что $a\in\mathscr{D}(r)$, $b\in\mathscr{D}(v)$, $v\geqslant r$, $v\neq r$, $b\geqslant a$, и пусть, например, $b\in Y$. По условию найдем q, f, для которых $f\in\mathscr{D}(q)$, $q\leqslant r$, $f\geqslant b$. Следовательно, функция $\mathscr{D}(p)-b$ имеет нуль на множестве $\{p\,|\,q\leqslant p\leqslant r\}$, не совпадающий с v, т. е. отображение $\mathscr{D}^{-1}$ неоднозначно. Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы 2.2 рассмотрим модель $\mathfrak{M}_2(B, s)$ (п. 1.5) при $s>0$, предполагая выполненными $U1$ и $U2$ (п. 1.5). Пусть $Y=\{y\,|\,y>-s\}$. В этом случае теорема 2.2 мало пригодна для доказательства существования равновесия, из-за неочевидности условия (*). Однако существование равновесия при любом $s>0$ следует из соответствующей теоремы (см. п. 2.2) для $\mathfrak{M}_1(W)$ при $w^k=(\sum_r \beta_r)^{-1}\beta_k s$, а значит, выполнено требование (*). Выполнение условий А5 и (**) следует из бюджетных равенств (см. (1.11)). Следовательно, равновесные цены единственны и не возрастают при увеличении s (в п. 4.3 будут получены более общие результаты).

2.4. Пусть GS-функция $\mathscr{D}$ определена на всем R_+^n и непрерывна. Ряд экономических моделей [3, 6], а также ряд проблем управления многосвязными системами [15, 16, 9] сводятся к задачам максимизации некоторой неубывающей функции на $\mathscr{D}^+$ или минимизации такой функции на $\mathscr{D}^-$. Решение задач этого типа не зависит от конкретной формы критерия, поскольку множество $\mathscr{D}^-$, если оно не пусто, содержит минимальную точку (т. е. вектор p^* такой, что $p^*\leqslant p \forall p\in\mathscr{D}^-$), а множество $\mathscr{D}^+$, если оно не пусто и ограничено, — максимальную. Этот факт легко следует из замкнутости $\mathscr{D}^-$ относительно операции min и замкнутости $\mathscr{D}^+$ относительно max (см. лемму 2.1, в которой, однако, идет речь об отображении, определенном на $\operatorname{int} R_+^n$). Как указано в [3], впервые наличие минимальной точки в $\mathscr{D}^-$ было замечено Э. Б. Ершовым.

Минимальная точка множества $\mathscr{D}^-$ удовлетворяет условиям $p_i\mathscr{D}_i(p)=0$, $i=1,\ldots,n$. Максимальная точка $\mathscr{D}^+$ всегда обращает $\mathscr{D}$ в нуль. Поэтому теорема 2.2 может быть использована как критерий максимальности точки. С другой стороны, следующее утверждение, фактически установленное в [3] (см. также [9]), указывает еще один критерий единственности нуля.

Т е о р е м а 2.3. Пусть $\mathscr{D}$ — непрерывная с вогнутыми компонентами GS-функция на R_+^n, причем $\mathscr{D}(0)>0$. Если $\mathscr{D}^-$ не пусто, то минимальная точка множества $\mathscr{D}^-$ является единственным нулем функции $\mathscr{D}$ и совпадает с максимальной точкой множества $\mathscr{D}^+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p^* — минимальная точка. Из валовой заменимости и условия $\mathscr{D}(0)>0$ следует, что $p^*>0$, $\mathscr{D}(p^*)=0$. Если $\mathscr{D}$ имеет еще один нуль, то p^* не максимальна в $\mathscr{D}^+$. Тогда найдется $p\in\mathscr{D}^+$, $p\geqslant p^*$, $p\neq p^*$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $q=p^*-\varepsilon(p-p^*)\geqslant 0$. Из вогнутости $\mathscr{D}$ следует, что $\mathscr{D}(q)\leqslant 0$. Но $q\leqslant p^*$, $q\neq p^*$, что противоречит минимальности p^*.

2.5. Если GS-функция положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет тождеству Вальраса А4, то множество ее нулей выпукло. Этот результат, принадлежащий Мак—Кензи [64], содержится также в [38] и в [10, 20]. В [26] он распространен на многозначный случай при произвольной степени однородности. Фактически доказательство из [26] сохраняется, если вместо А4 выполнено А3.

Т е о р е м а 2.4. Если GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям А1—А3, то $\mathscr{D}^0$ выпукло.

Доказательство немедленно следует из леммы 2.1 и следующего геометрического факта: конус* в R_+^n, замкнутый относительно операций max и min, является выпуклым [26].

Отметим, что положительно однородное неразложимое GS-отображение имеет не более одного нуля (с точностью до скалярного множителя). Этот факт следует непосредственно из определений.

2.6. В заключение этого параграфа докажем неравенство, имеющее важное значение для исследования устойчивости процессов регулирования цен (п. 6.4). Для однозначного случая оно было доказано в [35, 38]. Из него также следует выпуклость $\mathscr{D}^0$ [38], правда, в отличие от теоремы 2.4, требуется выполнение тождества Вальраса.

Теорема 2.5. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A2, A4. Если $q\in\mathscr{D}^0$ и $d\in\mathscr{D}(p)$, то $qd\geqslant 0$, а если $p\notin\mathscr{D}^0$, то $qd>0$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\Omega(p, q)$ множества координат $N=\{1,\ldots,n\}$ на классы, в каждом из которых отношение p_i/q_i постоянно:

$$\Omega(p,\ q)=\{N_1,\ldots,\ N_t,\ldots,\ N_l\}.\quad N_t=\{i\mid p_i/q_i=\gamma_t\},\quad \gamma_t>\gamma_{t+1}.$$

Пусть $p^k=(p_i^k)=\min\{p,\ \gamma_k q\}$, $H^k=\{i\mid p_i<\gamma_k q_i\}=\bigcup\limits_{t>k}N_t$. Так как $0\in\mathscr{D}(\gamma_k q)$, то по лемме 1.2 о комбинировании найдутся векторы g^k такие, что

$$g^k\in\mathscr{D}(p),\quad g^k\leqslant d\,[H^k]. \tag{2.6}$$

Поскольку $p^k[H^k]=p\,[H^k]$, то из закона Вальраса и (2.6) следует, что

$$0=p^k g^k\leqslant p^k d\,[H^k]=pd\,[\bigcup_{t>k}N_t]. \tag{2.7}$$

Если $\beta_t=pd\,[N_t]$, то из (2.7) получаем неравенства

$$\sum_{t>k}\beta_k\geqslant 0,\quad k=1,\ldots,\ l-1. \tag{2.8}$$

Поэтому

$$0=\gamma_1^{-1}\sum_{t=1}^{l}\beta_t\leqslant\gamma_1^{-1}\beta_1+\gamma_2^{-1}\sum_{t=2}^{l}\beta_t\leqslant\ldots\leqslant\sum_{t=1}^{l}\gamma_t^{-1}\beta_t=qd, \tag{2.9}$$

т. е. справедливо первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $qd=0$. В этом случае из (2.9) следует, что в (2.8), (2.7) выполняются равенства. Поэтому из (2.6) получаем

$$\mathscr{D}(p^k)\ni g^k,\quad g^k=d\,[\bigcup_{t>k}N_t],\quad k=1,\ldots,\ l-1. \tag{2.10}$$

Так как $p^l=\gamma_l q$, то $p^l\in\mathscr{D}^0$. Докажем, что если $p^{k+1}\in\mathscr{D}^0$, то и $p^k\in\mathscr{D}^0$, $1\leqslant k<l$.

* Множество K — конус, если $K=\lambda K\ \forall\,\lambda>0$. Нулевой вектор может принадлежать или не принадлежать K.

Ясно, что $p^k = \max\{p^{k+1}, p^k\}$, $\tilde{H}^k = \{i \mid p_i^{k+1} < p_i^k\} = \bigcup_{l<k} N_l$. Из (2.10) следует, что $g^k[\tilde{H}^k] = 0$. Ввиду того, что $0 \in \mathscr{D}(p^{k+1})$, по лемме 1.2 найдется вектор $f \in \mathscr{D}(p^k)$, $f \geqslant 0$. В силу закона Вальраса $f = 0$, т. е. $p^k \in \mathscr{D}^0$.

По индукции, $p^1 \in \mathscr{D}^0$. Поскольку $p^1 = p$, то теорема доказана.

§ 3. Равновесные цены и равновесные распределения

3.1. Пусть

$$\mathscr{D}(p) = \sum_{k \in M} \mathscr{D}^k(p), \quad M = \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{3.1}$$

В модели $\mathfrak{M}_1(W)$ (см. п. 1.5) и в ряде других отображение $\mathscr{D}^k$ интерпретируется как избыточный спрос k-го участника. Введем обозначения:

$$\mathbf{E} = \left\{(p, d^k, k \in M) \mid d^k \in \mathscr{D}^k(p), \ \sum_{k \in M} d^k = 0\right\},$$

$$\mathbf{D} = \left\{(d^k, k \in M) \mid \exists p : d^k \in \mathscr{D}^k(p), \ \sum_{k \in M} d^k = 0\right\}.$$

$\mathbf{E}$ — это «множество равновесий», $\mathscr{D}^0$ (см. (2.1)) интерпретируется как совокупность векторов равновесных цен, а $\mathbf{D}$ определяет множество равновесных распределений ресурсов.

Пусть $\mathbf{E} \neq \varnothing$. Следующее утверждение фактически доказано в [26].

Теорема 3.1. Пусть каждое GS-отображение $\mathscr{D}^k$ удовлетворяет A1 и A2 при $\alpha = 0$, а для их суммы $\mathscr{D}$ выполнено A3. Тогда

$$\mathbf{E} = \mathscr{D}^0 \times \mathbf{D}, \tag{3.2}$$

причем множества $\mathscr{D}^0$ и $\mathbf{D}$ выпуклы.

Если D^k однозначны, то, согласно (3.2), $\mathbf{D}$ содержит не более одного элемента.

В [26] предполагалось A4, но данное там доказательство остается справедливым и при более слабом условии A3. Благодаря этому уточнению, из теоремы 3.1 можно, например, получить утверждение о выпуклости p-оптимальных распределений, доказанное в [25, теорема 2] другим методом.

Теорема 3.1 находит особенно важные применения при изучении моделей чистого обмена (см. следствие 3.1.).

3.2. Рассмотрим вопрос о единственности равновесия в моделях $\mathfrak{M}_1$ (п. 1.5). Если в $\mathfrak{M}_1$ целевые функции линейны, то, как показал Гейл [50], все равновесия «равновыгодны» для каждого участника. Чтобы сформулировать обобщение этого результата, удобно ввести следующее понятие [50, 26].

Определение 3.1. Два равновесия (см. определение 1.8) $(p,\ d^k,\ k\in M)$ и $(q,\ f^k,\ k\in M)$ эквивалентны, если $u_k(d^k)=u_k(f^k)\ \forall k\in M$. Если все равновесия эквивалентны, то говорят, что равновесие единственно по предпочтениям.

Наличие неэквивалентных равновесий вызывает существенные трудности при использовании моделей равновесия как инструмента экономического анализа. Поэтому важно знать условия, обеспечивающие эквивалентность. Очевидно, равенство (3.2) является одним из таких условий. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение, обобщающее результат из [50].

Следствие 3.1 [26]. Пусть в модели $\mathfrak{M}_1(W)$ каждая целевая функция удовлетворяет $U1$ и выполнено $U2$ (п. 1.5). Если индивидуальный избыточный спрос

$$\mathcal{D}^k(p)=\mathcal{C}^k(p,\ pw^k)-w^k \tag{3.3}$$

является GS-отображением при любом k, то равновесие единственно по предпочтениям.

В [26] показано, что при выполнении $U1$ и $U2$ равенство (3.2) необходимо для эквивалентности равновесий в $\mathfrak{M}_1$. Это утверждение, не использующее условия валовой заменимости, справедливо также для существенно более широкого класса моделей (включающего, в частности, $\mathfrak{M}_2(B,\ s)$).

Введем следующие предположения об индивидуальном спросе $\mathcal{C}^k(p,\ 1)$ при единичном доходе.

$S1$. $\mathcal{C}^k(p,\ 1)$ удовлетворяет А1, $\mathcal{C}^k(p,\ 1)\subset R_+^n\ \forall p$.

$S2$. $\mathcal{C}^k(p,\ \beta)=\mathcal{C}^k(p/\beta,\ 1)\ \ \forall\beta>0$; $\mathcal{C}^k(p,\ 0)=\{0\}$.

$S3$. $pc^k=1\ \forall p$ и $\forall c^k\in\mathcal{C}^k(p,\ 1)$.

$S4$. $\mathcal{C}^k(p,\ 1)$ является GS-отображением.

$S5$. $\mathcal{C}^k(p,\ 1)$ нормально (см. определение 1.7).

Отметим, что $S2$, $S4$ и $S5$ влекут за собой GS-свойство для (3.3) (предложение 1.2).

Свойства $S1$—$S3$ следуют из предположения $U1$ (п. 1.5) о целевых функциях участников. Можно проверить, что условия теоремы 1.1 достаточны для выполнения $S1$—$S5$.

Напомним, что вектор равновесных цен в модели $\mathfrak{M}_1(W)$, $W=(w^k,\ k\in M)$, является нулем суммы отображений (3.3), а в модели $\mathfrak{M}_2(B,\ s)$, где $B=(\beta_k,\ k\in M)$, — нулем отображения $\sum_{k=1}^{m}\mathcal{C}^k(p,\ \beta_k)-s$. Все цены считаем положительными.

Приводимые ниже результаты опираются только на перечисленные выше свойства индивидуальных функций спроса; необязательно, чтобы эти функции порождались задачей максимизации.

В [45] для линейной модели чистого обмена получены достаточные* условия единственности цен равновесия. В [31]

---

* В [45] эти условия ошибочно объявлены также необходимыми. Опровергающий пример приведен в [31, стр. 13].

содержится более общий результат. Чтобы сформулировать его, введем следующее определение.

Определение 3.2. [31]. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}_1(W)$ разложима на l подмоделей $\mathfrak{M}_1(W_t)$, если 1) $W_t = (w^k,\ k \in M_t)$, где множества M_t, $t=1, \ldots, l$, образуют разбиение множества участников M; 2) $w_i^k = 0$ при $k \in M_t$, $i \notin N_t$, где N_t, $t=1, \ldots, l$, образуют разбиение множества наличных ресурсов $N^+ = \left\{ i \,\middle|\, \sum_{k \in M} w_i^k > 0 \right\}$; 3) набор $(c^k,\ k \in M)$ векторов спроса c^k потребителей k является равновесным распределением в модели $\mathfrak{M}_1(W)$ тогда и только тогда, когда наборы $(c^k,\ k \in M_t)$ являются равновесными распределениями в моделях $\mathfrak{M}_1(W_t)$ для всех $t=1, 2, \ldots, l$.

Считаем, что модель всегда имеет тривиальное разложение при $l=1$. Если других разложений нет, то модель называем неразложимой.

Очевидно, в разложимой модели участники из разных групп M_t владеют разными видами ресурсов и в любом равновесии обмениваются только с участниками из своей группы. Поэтому $c_i^k = 0$ при $k \in M_t$, $i \notin N_t$ для любого равновесного распределения $(c^k,\ k \in M)$ модели $\mathfrak{M}_1(W)$.

Если $\mathbf{P}_1(W)$, $\mathbf{P}_1(W_t)$ — множества равновесных цен в $\mathfrak{M}_1(W)$ и $\mathfrak{M}_1(W_t)$, соответственно, то, как следует из определения 3.2,

$$\mathbf{P}_1(W) = \bigcap_{t=1}^{l} \mathbf{P}_1(W_t). \tag{3.4}$$

В следующих теоремах используются обозначения (1.14).

Теорема 3.2 [31]. Пусть выполнены условия $S1$—$S5$, $\mathbf{P}_1(W) \neq \varnothing$. Тогда найдутся разложение модели $\mathfrak{M}_1(W)$ на l подмоделей и векторы $a^t = (a_i^t) \in R_+^n$, $t=1, \ldots, l$, такие, что $a_i^t > 0$ при $i \in N_t$ и

$$\mathbf{P}_1(W) = \bigcap_{t=1}^{l} \{p \mid p \geqslant \lambda a^t,\ p[N_t] = \lambda a^t [N_t],\ \lambda \in \operatorname{int} \mathrm{R}_+^1\}. \tag{3.5}$$

При доказательстве этой теоремы существенно используется теорема о структуре множества равновесий в модели $\mathfrak{M}_2$ с фиксированными доходами (см. п. 3.3, теорема 3.5) и конструкция, которая будет описана в § 5 (см. свойства функции $\mathscr{H}$ в п. 5.3).

Пусть разбиение N_t множества ресурсов соответствует разложению модели $\mathfrak{M}_1(W)$, о котором говорится в теореме 3.2. Тогда, как утверждает эта теорема, пропорции равновесных цен на каждом множестве N_t определяются однозначно. Непосредственным следствием теоремы 3.2 является следующий важный результат.

Теорема 3.3 [31]. Пусть выполнены условия $S1$—$S5$, $\mathbf{P}_1(W) \neq \varnothing$. Если модель $\mathfrak{M}_1(W)$ неразложима, то равновесные цены единственны (с точностью до скалярного множителя) на множестве ненулевых ресурсов модели, т. е. для любых p, $q \in P_1(W)$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что

$$p[N^+] = \lambda q[N^+], \quad N^+ = \left\{ i \,\middle|\, \sum_{k \in M} w_i^k > 0 \right\}.$$

В разложимой модели матрица со столбцами w^k приводится к блочно-диагональному виду. Поэтому любое из двух указанных ниже условий является достаточным для единственности равновесных цен: 1) $\exists k \in M$, $w^k > 0$; 2) $\forall i$, j, $i \neq j$, $\exists k \in M$, $w_i^k w_j^k > 0$. Каждое из следующих условий обеспечивает единственность равновесных цен на N^+: 3) $\exists i$, $w_i^k > 0$ $\forall k \in M$; 4) $\forall k \in M$, $r \in M$, $k \neq r$, $\exists i$, $w_i^k w_i^r > 0$.

В тех случаях, когда условия 1) — 4) не выполняются, для проверки модели на неразложимость можно использовать аналогичные условия в терминах равновесных распределений. Отметим, что равновесные цены могут быть единственными и в разложимой модели.

Соответствующий пример из [31] включает три продукта и трех участников с целевыми функциями $u_1(x) = u_2(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $u_3(x) = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_3}$ и начальными запасами $w^1 = (1, 0, 0)$, $w^2 = (0, 1, 0)$, $w^3 = (0, 0, a)$, где $a > 0$.

Легко видеть, что для $a \leqslant 1$ векторы цен из множества $\{p \mid p_3 \geqslant p_1 = p_2 \geqslant p_3\sqrt{a}\}$ являются равновесными. Поскольку участники 1 и 2 могут при этом обмениваться продуктами, то возможно лишь разложение с $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3\}$. При $a < 1$ модель разложима, так как цены не единственны. Можно показать, что она разложима и при $a = 1$. Используя (3.4), легко проверить, что других равновесных цен нет. Таким образом, при $a = 1$ пропорции равновесных цен определяются однозначно.

При $a > 1$ модель не разлагается, в чем легко убедиться, отыскав равновесное распределение* с вектором $c^3 > 0$.

3.3. Рассмотрим теперь модель с фиксированными доходами $\mathfrak{M}_2(B, s)$. Как уже отмечалось, при выполнении условий $U1$ и $U2$ (п. 1.5) существование равновесия в $\mathfrak{M}_2(B, s)$ при $B > 0$, $s > 0$ следует из известных теорем (см., например, [20]). В тех случаях, когда доходы некоторых участников или запасы некоторых продуктов могут быть нулевыми, оказывается полезной формулируемая ниже условная теорема существования.

Введем обозначение

$$Z(B) = \{k \mid \beta_k = 0\},$$

---

* В [31, стр. 19] ошибочно утверждается, что при $1 < a < 3$ равновесий нет. В этом случае имеется, например, равновесие $p_1 = p_2 = p_3$, $c^1 = (1 - \alpha, 0, \alpha)$, $c^2 = (0, 1 - \beta, \beta)$, $c^3 = (\alpha, \beta, 1)$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = a - 1$.

где $B=(\beta_k)\in R_+^m$. Множество равновесных цен в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$ обозначим через $P_2(B, s)$.

Теорема 3.4. [27]. Пусть справедливы предположения $S1-S5$. Если

$$Z(B^*)\supset Z(B)\supset Z(\tilde{B}),\quad s^*\geqslant s\geqslant\tilde{s},$$

причем $P_2(B^*, s^*)\neq\varnothing$, $P_2(\bar{B}, \tilde{s})\neq\varnothing$, то и $P_2(B, s)\neq\varnothing$.

Доказательство опирается на теорему 2.1.

В заключение этого раздела сформулируем теорему о структуре множества равновесий в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$.

Теорема 3.5. Пусть в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$ выполнены условия $S1-S4$. Тогда множество равновесий $\mathbf{E}$ (если оно не пусто) является прямым произведением выпуклого множества равновесных векторов цен $\mathbf{P}$ и выпуклого множества равновесных распределений $\mathbf{C}$: $\mathbf{E}=\mathbf{P}\times\mathbf{C}$.
При этом найдется вектор $a=(a_i)\in R_+^n$ такой, что $a_i>0$ при $i\in N^+=\{i\in N\,|\,s_i>0\}$ и

$$\mathbf{P}=\{p\,|\,p\geqslant a,\ p_i=a_i \text{ для } i\in N^+\}.$$

В предположениях $U1$ и $U2$ утверждения этой теоремы доказаны в [26], где рассматривалась несколько более общая модель, учитывающая производство. При этом вместо $S4$ достаточно потребовать валовой заменимости совокупного спроса. Доказательство теоремы 3.5, не опирающееся на существование целевых функций, порождающих индивидуальный спрос, дано в [31].

§ 4. СРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ

4.1. Сравнением равновесий, или сравнительной статикой называют раздел теории экономического равновесия, изучающий реакцию равновесных экономических систем на внешние воздействия. Типичная проблема состоит в следующем. Пусть система находится в равновесии, а ее избыточный спрос положительно однороден нулевой степени и удовлетворяет тождеству Вальраса (см. п. 1.6). Один из товаров, например, n-ый, выбран в качестве эталона ценности («numéraire»), цена на него фиксирована. Предположим, что в результате изменения целевых функций, доходов потребителей или технологии избыточный спрос на i-ый товар увеличился, а на эталонный — уменьшился (такие изменения называют бинарными; это — простейший тип возмущений, согласованных с тождеством Вальраса). Как изменятся равновесные цены?

Этот вопрос был поставлен Хиксом [56], который предположил, что при заменимости всех благ в результате описанного возмущения 1) цена i-го товара возрастает; 2) все остальные цены не убывают; 3) ни одна из цен не может возрасти в большей пропорции, чем цена i-го товара. Три приведенные утверждения часто называют законами Хикса. Они могут показаться «экономически очевидными». Тем не менее их доказательство требует весьма сильных предположений. Локальные результаты в гладком случае получены Мосаком [68] (см. также [46]). Общий случай бинарных изменений для однозначного избыточного спроса, удовлетворяющего в. з. (до и после возмущения) и некоторым дополнительным предположениям, изучен Моришимой [66, 19]. При доказательстве второго и третьего законов он использует условие неразложимости. Эти и ряд других результатов сравнительной статики содержатся также в [36, 21].

Ниже рассматриваются свойства GS-отображений, позволяющие в некоторых ситуациях предсказать знаки изменения равновесных цен по характеру возмущений. Будет также доказан для многозначного случая ряд других утверждений, в том числе, так называемый, принцип Ле Шателье—Самуэльсона [76, 77, 19].

4.2. Следующая теорема (обобщающая теорему 1 из [27]) влечет за собой первый закон Хикса, а в случае единственности равновесных цен — также второй и третий законы.

Напомним, что через $\mathscr{D}^0$ обозначается множество нулей отображения $\mathscr{D}$ (см. (2.1)).

Теорема 4.1. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1—A3, $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$, $d\neq 0$ и $q=(q_i)\in\mathscr{D}^0$. Тогда найдутся номера j, s и вектор $q^*=(q_i^*)\in\mathscr{D}^0$ такие, что $d_j<0$, $d_s>0$, и выполняются соотношения:

$$q_j^*/p_j\leqslant q_i^*/p_i\leqslant q_s^*/p_s \text{ для всех } i, \tag{4.1}$$

$$q_i^*=q_i \text{ для } i \text{ таких, что } d_i\neq 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ввиду однородности $\mathscr{D}$, из A3 следует, что $N^-=\{i\,|\,d_i<0\}\neq\varnothing$, $N^+=\{i\,|\,d_i>0\}\neq\varnothing$. Пусть

$$\lambda=\max_{i\in N^-}p_i/q_i,\ q'=\max\{\lambda q,\ p\},\ \mu=\min_{i\in N^+}p_i/q_i,\ q''=\min\{p,\ \mu q\}.$$

Ясно, что $q_j'=\lambda q_j=p_j$, $q_s''=p_s=\mu q_s$ для некоторых $j\in N^-$, $s\in N^+$. Так как $0\in\mathscr{D}(\lambda q)$, то по лемме 1.2, в силу определения λ, найдется $f\in\mathscr{D}(q')$ такой, что $f\geqslant d[I]\geqslant 0$, $I=\{i\,|\,\lambda q_i<p_i\}$. Из A3 следует, что $f=0$ и, значит, $d[I]=0$. Поэтому

$$q'\in\mathscr{D}^0,\ p_i\leqslant\lambda q_i=q_i' \text{ при } d_i\neq 0.$$

Аналогично получаем, что

$$q''\in\mathscr{D}^0,\ p_i\geqslant\mu q_i=q_i'' \text{ при } d_i\neq 0.$$

В силу леммы 2.1, $\hat q=\max\{q,\ \lambda^{-1}q'\}\in\mathscr{D}^0$, $q^*=\min\{\hat q,\ \mu^{-1}q''\}\in\mathscr{D}^0$. Ясно, что (4.2) выполняется. Нетрудно также проверить, что $\mu^{-1}p\geqslant q^*\geqslant\lambda^{-1}p$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Если при условиях теоремы 4.1 вектор $p\notin\mathscr{D}^0$, то $q_j/p_j<q_s/p_s$ для некоторых j, s таких, что $d_j<0$, $d_s>0$.

Законы Хикса следуют из теоремы 4.1, если считать, что $\mathscr{D}$ является возмущенным избыточным спросом, а p — старыми равновесными ценами; свойства исходного избыточного спроса непосредственно не используются. Но фактически они определяют класс возмущений, при которых $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1.

Теорема 4.1 опирается на условие А3, более слабое, чем тождество Вальраса, и применима к произвольным возмущениям спроса, а не только к бинарным. Это оказывается существенным при анализе процессов регулирования цен (см. § 6) и при доказательстве коолиционной устойчивости равновесий (§ 5).

Моришима [66, 19] доказал второй и третий законы в сильной форме, утверждающие, что при увеличении избыточного спроса на i-ый товар и уменьшении его на n-ый, эталонный товар все равновесные цены (кроме n-ой) строго возрастают и цена i-го товара возрастает в большей пропорции, чем любая другая цена. При этом Моришима предполагает, что избыточный спрос является непрерывной GS-функцией, удовлетворяет А2, А4 и, сверх того, следующему условию сильной неразложимости:

Если $p\leqslant p'$, $p\neq p'$ и множество $I=\{i\,|\,p_i=p_i'\}$

содержит не менее двух элементов, то найдутся j, $s\in I$ такие, что $\mathscr{D}_j(p)\neq\mathscr{D}_j(p')$, $\mathscr{D}_s(p)\neq\mathscr{D}_s(p')$.

В. И. Опойцев [21, стр. 72] доказывает третий закон Хикса в сильной форме, используя несколько иное условие на функцию $\mathscr{D}(p)=(\mathscr{D}_i(p))$, которое также обеспечивает единственность равновесных цен:

$\mathscr{D}_i(p)$ убывает по $p_i \forall i$ и возрастает по $p_n \forall i\neq n$.

Часть этих результатов следует из теорем 4.2, 4.3 (п. 4.3).

4.3. Рассмотрим теперь ситуацию, когда изменения избыточного спроса на все товары имеют одинаковый знак. Такой случай невозможен при выполнении закона Вальраса, но для моделей типа $\mathfrak{M}_2$ его изучение представляет интерес.

Теорема 4.2 [29]. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А3 и $q\in\mathscr{D}^0$. Если $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$, $d\geqslant 0$, то $\max\{p, q\}\in\mathscr{D}^0$. Кроме того, $q_i>p_i$ при $d_i>0$, а если $\mathscr{D}$ неразложимо и $d\neq 0$, то $q>p$. Из условия $d\leqslant 0$ следует, что $\min\{p, q\}\in\mathscr{D}^0$ и $q_i<p_i$ при $d_i<0$, а если $\mathscr{D}$ неразложимо и $d\neq 0$, то $q<p$.

Доказательство. Согласно лемме 1.2 о комбинировании для $\hat{q}=\max\{p, q\}$, найдется вектор $a\in\mathscr{D}(\hat{q})$ такой, что $a\geqslant d[I]\geqslant 0$, $I=\{i\,|\,p_i\geqslant q_i\}$. Из А3 следует, что $a=0$, значит, $d[I]=0$. Итак, $\hat{q}\in\mathscr{D}^0$ и $q_i>p_i$ при $d_i>0$. Для неразложимого $\mathscr{D}$ из соотношений $\hat{q}\geqslant p$, $d\neq 0$, $d\geqslant 0$ следует $\hat{q}>p$, но тогда $q>p$. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

Нижеследующее утверждение уточняет теорему 4.2 при дополнительных условиях нормальности и строгой нормальности избыточного спроса (см. определение 1.7).

Теорема 4.3. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A3, нормально и $\mathscr{D}^0 \neq \varnothing$. Если $d \in \mathscr{D}(p)$, $d \geqslant 0$, $N^+ = \{i \mid d_i > 0\} \neq \neq \varnothing$, то для некоторого $q \in \mathscr{D}^0$ выполнены соотношения

$$q \neq p, \quad 1 \leqslant q_i/p_i \leqslant \max_{t \in N^+} q_t/p_t \forall i. \tag{4.3}$$

Если же, сверх того, $\mathscr{D}$ строго нормально, то (4.3) справедливо при любом $q \in \mathscr{D}^0$, причем

$$q_i/p_i < \max_{t \in N^+} q_t/p_t \quad \forall i \notin N^+. \tag{4.4}$$

Аналогично, если $d \in \mathscr{D}(p)$, $d \leqslant 0$, $N^- = \{i \mid d_i < 0\} \neq \varnothing$, то для некоторого $q \in \mathscr{D}^0$ справедливы неравенства

$$q \neq p, \quad 1 \geqslant q_i/p_i \geqslant \min_{t \in N^-} q_t/p_t \ \forall i. \tag{4.5}$$

В случае строгой нормальности (4.5) выполняется при любом $q \in \mathscr{D}^0$, причем правое неравенство оказывается строгим $\forall i \notin N^-$.

Доказательство. Рассмотрим случай $d \geqslant 0$, $N^+ \neq \varnothing$. Согласно теореме 4.2, найдется $v \in \mathscr{D}^0$, $v \geqslant p$, $\lambda = \max_{t \in N^+} v_t/p_t > 1$. Очевидно, что для $q = \min\{\lambda p, v\}$ выполняется (4.3). По лемме 1.2, в силу нормальности и определения λ, существует вектор $\bar{a} \in \mathscr{D}(q)$ такой, что $\bar{a} \leqslant \underline{f}[I] \leqslant d[I] = 0$, $f \in \mathscr{D}(\lambda p)$, $I = \{i \mid \lambda p_i < v_i\}$. Из A3 следует, что $\bar{a} = 0$, т. е. $q \in \mathscr{D}^0$.

Пусть теперь $\mathscr{D}$ строго нормально, q — произвольный вектор из $\mathscr{D}^0$. Если неравенство $p \leqslant q$ не выполняется, то по теореме 4.2 $\alpha = \min_{i \notin N^+}\{q_i/p_i\} < 1$. Тогда $\alpha p \leqslant q$, $I = \{i \mid \alpha p_i = = q_i\} \neq \varnothing$ и существует вектор $g \in \mathscr{D}(\alpha p)$, $g > d \geqslant 0$. Поскольку это противоречит GS-свойству, что $p \leqslant q$.

Если не выполняется (4.4), то $\mu = q_r/p_r \geqslant q_i/p_i$ для некоторого $r \notin N^+$ и всех i. Так как $\mu > 1$ (по теореме 4.2), то, в силу строгой нормальности, найдется $h \in \mathscr{D}(\lambda^{-1}q)$, $h > 0$. Но это противоречит GS-свойству, так как $p \geqslant \lambda^{-1}q$, $I' = \{i \mid p_i = = \lambda^{-1}q_i\} \neq \varnothing$ и $I \cap N^+ = \varnothing$ (в силу теоремы 4.2). Таким образом, (4.4) выполняется, и первая часть теоремы доказана. В случае $d \leqslant 0$, $N^- \neq \varnothing$ доказательство аналогично.

Пусть возмущенный спрос $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3, причем в исходном состоянии равновесия p только первая компонента вектора $d \in \mathscr{D}(p)$ отлична от нуля и положительна. Предположим также, что новый вектор равновесных цен единственен. Тогда, согласно теореме 4.3, цены всех продуктов не убывают, а относительный рост первой цены максимален; при строгой нормальности первая цена растет в большей пропорции, чем все остальные.

Рассмотрим теперь, как ведут себя равновесные цены в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$ (см. п. 1.5) при вариациях доходов и предложения. Доказываемое ниже утверждение основано на применении теоремы 4.2.

Как и прежде, через $P_2(B, s)$ обозначим множество равновесных цен в $\mathfrak{M}_2(B, s)$.

Теорема 4.4. Предположим, что выполнены условия $S1$—$S5$,

$$B \geqslant B', \quad s \leqslant s', \quad q=(q_i)\in P_2(B, s), \quad q'=(q_i')\in P_2(B', s').$$

Тогда $q_i \geqslant q_i'$ для любого i такого, что $s_i>0$. Пусть, кроме того, $B \neq B'$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(а) функция спроса некоторого участника k такого, что $\beta_k>\beta_k'$ строго нормальна;

(б) функция спроса некоторого участника k с доходом $\beta_k>0$ неразложима.

Тогда $q>q'$.

Доказательство. Если $\mathscr{D}(p)$—избыточный спрос в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$, то, в силу нормальности участников, найдется $f\in\mathscr{D}(q')$, $f\geqslant 0$. Так как $\bar{q}=\max\{q, q'\}\in P_2(B, s)$ в силу теоремы 4.2, то $qs=\sum_{k=1}^{m}\beta_k=\bar{q}s$. Поэтому $q_i=\bar{q}_i$ при $s_i>0$, т. е. $q_i \geqslant q_i'$.

Если $B \neq B'$, то $f \neq 0$. При условии (а) вектор f может быть выбран строго положительным. Поэтому второе утверждение теоремы следует из теоремы 4.2. Ч. т. д.

Следствие 4.2. Если q, $q'\in P_2(B, s)$ и $s_i>0$, то $q_i=q_i'$.

Отметим, что утверждения, близкие к теореме 4.4, содержатся в [32] (для однозначного случая) и в [27].

Замечание. Пусть GS-функция $\mathscr{D}(p)=(\mathscr{D}_i(p))$ определена и непрерывна на $\operatorname{int} R_+^n$, удовлетворяет A2, A4 и условию сильной неразложимости Моришимы [19] (см. п. 4.2). Тогда из теоремы 4.2 следует второй закон Хикса в сильной форме. Действительно, пусть цена n-го (эталонного) товара фиксирована. Рассмотрим функцию $\tilde{\mathscr{D}}(p)$ с $(n-1)$-ой компонентами $\tilde{\mathscr{D}}_i(p)=\mathscr{D}_i(p)$, $i=1, \ldots, n-1$. В силу закона Вальраса, совокупности нулей функций $\mathscr{D}(p)$ и $\tilde{\mathscr{D}}(p)$ совпадают (с точностью до скалярного множителя). Далее, $\tilde{\mathscr{D}}(p)$ можно считать определенной на $\operatorname{int} R_+^{n-1}$; легко проверить, что она удовлетворяет условию A3, нормальна и обладает свойством в. з. Из сильной неразложимости $\mathscr{D}(p)$ следует неразложимость $\tilde{\mathscr{D}}(p)$. Таким образом, теорема 4.2 применима к $\tilde{\mathscr{D}}$ и влечет за собой сильную форму второго закона Хикса для системы с избыточным спросом $\mathscr{D}$.

Отметим также, что если GS-функция $\mathscr{D}(p)$ удовлетворяет A2 и A4, то из дополнительного условия В. И. Опойцева [21] (см. п. 4.2) следует строгая нормальность $\bar{\mathscr{D}}(p)$, а значит, по теореме 4.3, для $\mathscr{D}(p)$ справедлив третий закон Хикса в сильной форме.

4.4. Предположим, что в системе, находившейся в равновесии, спрос на первый товар вырос (за счет уменьшения спроса на эталонный n-ый продукт). Пусть фиксированы цены на продукты из множества L, $L\ni n$, и существуют цены, выравнивающие спрос и предложение по всем товарам $i\notin L$; для товаров из L равновесие поддерживается за счет «внешних поставок». Из известной теоремы сравнительной статики, часто называемой принципом Ле Шателье-Самуэльсона, следует, что при расширении множества L (и при выполнении определенных предположений о функции спроса) разность между ценами первого товара в новом и старом состояниях равновесия не может расти. Увеличение этой цены будет наибольшим, если все цены (за исключением n-ой) являются «гибкими», и наименьшим, если все они фиксированы. Если в описанном процессе при расширении множества L первая цена строго убывает, то говорят о принципе Ле Шателье-Самуэльсона в сильной форме.

Идея распространения принципа Ле Шателье на экономические системы принадлежит Самуэльсону [76, 77]. Он рассмотрел два типа моделей. В первом случае модель описывается экстремальной задачей, во втором — непосредственно задается GS-функцией избыточного спроса. Формулировки принципа для этих двух вариантов значительно разнятся. Первый вариант разрабатывался в [60, 61, 88]; здесь мы на нем не останавливаемся. При в. з. в формулировку принципа включается сопоставление приращений всех свободных цен, а не только цены продукта с изменившимся спросом; качественно все нефиксированные равновесные цены ведут себя аналогичным образом.

Самуэльсон [77] наметил доказательство принципа в сильной форме при гладких функциях спроса и строгой в. з. Моришима [19, стр. 25] отказался от предположения гладкости. Чтобы получить сильную форму теоремы, он использует условие строгой в. з. Принцип Ле Шателье-Самуэльсона доказан также в [21, стр. 73] при предположениях, промежуточных между в. з. и строгой в. з.

Во всех упомянутых работах предполагается, что избыточный спрос однозначен; в [19, 21] постулируется также положительная однородность нулевой степени и тождество Вальраса. Ниже принцип Ле Шателье-Самуэльсона будет доказан в многозначном случае при следующем дополнительном условии.

А6. Для любых p, q, d, f таких, что $d\in\mathscr{D}(p)$, $f\in\mathscr{D}(q)$ $p\leqslant q$, выполняется неравенство $pd\geqslant qf$.

Ясно, что из А4 следует А6. Но А6 выполняется также и в модулях с фиксированными доходами $\mathfrak{M}_2$, для которых тождество Вальраса не имеет места.

Пусть $p\in\operatorname{int}R_+^n$ и $K\subset N=\{1, \ldots, n\}$. Введем обозначение

$$Q_{\mathscr{D}}(K, p)=$$
$$=\{q\in\operatorname{int} \mathrm{R}_+^n \mid q[N\setminus K]=p[N\setminus K],\ \exists d\in\mathscr{D}(q): d[K]=0\}. \quad (4.6)$$

Векторы из $Q_{\mathscr{D}}$ (K, p) будем называть ценами частичного равновесия (для продуктов из K при условии, что цены продуктов из $L=N\setminus K$ фиксированы на значениях p_i).

Теорема 4.5. («принцип Ле Шателье — Самуэльсона»). Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А6 и заданы вектор p и множества $K_{t+1}\subset K_t\subset N$, $t=1, 2, \ldots, \tau$, для которых $Q_{\mathscr{D}}(K_t, p)\neq\varnothing$. Если $d\in\mathscr{D}(p)$, $d[K_1]\geqslant 0$, то найдутся векторы $q^t\in Q_{\mathscr{D}}(K_t, p)$ такие, что $p\leqslant q^{t+1}\leqslant q^t$. Если же $d[K_1]\leqslant 0$, то для некоторых $p^t\in Q_{\mathscr{D}}(K_t, p)$ выполняются неравенства $p^t\leqslant p^{t+1}\leqslant p$.

Для доказательства теоремы 4.5 требуется детальное изучение частичного равновесия, которому посвящен следующий пункт данного параграфа. Одновременно будут получены условия существования и единственности цен частичного равновесия и тем самым уточнено утверждение теоремы 4.5.

4.5. Укажем ряд важных свойств частичного равновесия.

Теорема 4.6. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А6, $K\subset N$. Тогда при $Q_{\mathscr{D}}(K, p)\neq\varnothing$ справедливы следующие утверждения:

1) $Q_{\mathscr{D}}(K, p)$ замкнуто относительно операций max и min;

2) если q, $q'\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$ и $d\in\mathscr{D}(q)$, $d[K]=0$, то $d\in\mathscr{D}(q')$;

3) если $\mathscr{D}$ — неразложимо и $K\neq N$, то $Q_{\mathscr{D}}(K, p)$ содержит только один вектор;

4) если $q\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$, $d\in\mathscr{D}(p)$ и $d[K]\leqslant 0$, то $\min\{q, p\}\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$, $q_i\leqslant p_i$ при $d_i<0$;

5) если $q\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$, $d\in\mathscr{D}(p)$, $d[K]\geqslant 0$, то $\max\{q, p\}\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$, $q_i\geqslant p_i$ при $d_i>0$;

6) если $q\in Q_{\mathscr{D}}(K, p)$, $q'\in Q_{\mathscr{D}}(K', p)$, $K'\subset K$, то $\min\{q, q'\}\in Q_{\mathscr{D}}(K', p)$ при $q\geqslant p$ и $\max\{q, q'\}\in Q_{\mathscr{D}}(K', p)$ при $q\leqslant p$.

Утверждения этой теоремы являются простыми следствиями следующей технической леммы.

Лемма 4.1. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А6 и $f\in\mathscr{D}(q)$, $f[K]=0$ для $K\subset N$, $L=N\setminus K$. Тогда если

$$d\in\mathscr{D}(p),\quad d[K]\leqslant 0,\quad p[L]\geqslant q[L], \qquad (4.7)$$

то $f\in\mathscr{D}(\bar{q})$, где $\bar{q}=\min\{p, q\}$, и $q_i\leqslant p_i$ как только $d_i<0$. Если же

$$d'\in\mathscr{D}(p'),\quad d'[K]\geqslant 0,\quad p'[L]\leqslant q[L], \qquad (4.8)$$

то $f\in\mathscr{D}(\bar{\bar{q}})$, где $\bar{\bar{q}}=\max\{p', q\}$ и $q_i\geqslant p'_i$ как только $d_i>0$.

Доказательство. В силу леммы 1.2 о комбинировании, найдется $g\in\mathscr{D}(\bar{q})$ такой, что

$$g \leqslant d[I_1]+f[I_2], \quad I_1=\{i \mid p_i<q_i\}, \quad I_2=N \setminus I_1.$$

(Из (4.7 следует, что $d[I_1] \leqslant f[I_1]=0$, т. е. $q \leqslant f$. Если $g \neq f$, то $\bar{q}g<\bar{q}f=qf$, что противоречит А6. Поэтому $g=f$, $d[I_1]=0$, откуда и следует утверждение леммы для случая (4.7). Второе утверждение доказывается аналогично. Ч. т. д.

Доказательство теоремы 4.6. Утверждения 1, 4 и 5 теоремы 4.6 очевидным образом следуют из леммы 4.1. Утверждение 2 этой теоремы следует из леммы 4.1, ввиду того, что $q'=\max\{q', \bar{q}\}$, где $\bar{q}=\max\{q'\ q\}$. Утверждение 3 вытекает из определения неразложимого GS-отображения с учетом утверждений 1 и 2 доказываемой теоремы. Утверждение 6 легко проверить применяя лемму 4.1. Ч. т. д.

Теперь, опираясь на свойства 4—6 частичного равновесия, нетрудно доказать принцип Ле Шателье—Самуэльсона.

Доказательство теоремы 4.5. В случае $d[K_1] \geqslant 0$, ввиду утверждения 5 теоремы 4.6, найдутся векторы $v^t \in Q_{\mathscr{D}}(K_t, p)$ такие, что $v^t \geqslant p$. Положим $q^1=v^1$ и построим $q^{t+1}=\min\{q^t, v^{t+1}\}$. В силу утверждения 6 теоремы 4.6, $q^{t+1} \in Q_{\mathscr{D}}(K_{t+1}, p)$. Ясно, что $q^t \geqslant q^{t+1} \geqslant p$. Первое утверждение теоремы доказано. Второе доказывается аналогично.

Следующая теорема дает условия, при которых частичное равновесие существует.

Теорема 4.7. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А5. Если для заданных $\tilde{p}$, K найдутся векторы p, q, d, f, для которых выполняются условия

$$p \leqslant \tilde{p} \leqslant q, \quad p_i<q_i \text{ при } i \notin K, \tag{4.9}$$

$$d \in \mathscr{D}(p), \quad d[K] \geqslant 0, \quad f \in \mathscr{D}(q), \quad f[K] \leqslant 0, \tag{4.10}$$

то существует вектор r такой, что

$$p \leqslant r \leqslant q, \quad r \in Q_{\mathscr{D}}(K, \tilde{p}). \tag{4.11}$$

Доказательство опирается на леммы 1.1 и 1.2; здесь мы его не приводим.

При дополнительном условии нормальности из теоремы 4.7 следует, что непустота $\mathscr{D}^0$ влечет за собой существование частичного равновесия при фиксации цен произвольного собственного подмножества товаров на произвольном уровне, поскольку для любого $\tilde{p}$ найдутся p, q, d, f, удовлетворяющие (4.9) и (4.10).

§ 5. КОАЛИЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

5.1. Сравнительно недавно Гейл [49], а затем Ауманн и Пелег [40] обнаружили, что равновесие чистого обмена может быть в некотором смысле неустойчивым. Ситуацию, которую они рассматривали, удобно интерпретировать в терминах торговли между регионами (странами или экономическими районами).

Пусть в каждом регионе имеется несколько фирм, обменивающихся между собой и с другими фирмами по ценам равновесия. Предположим, что ф рмы из первого региона перераспределили свои начальные запасы, а затем продолжают обмениваться в рамках всей системы. Для нового распределения начальных запасов старые цены уже не будут балансировать спрос и предложение. Пусть в результате коррекции цен установилось новое состояние равновесия. Может ли случиться так, что все фирмы из первого региона выиграют, по сравнению с первоначальным состоянием? Отметим, что, согласно теореме о ядре (см., например, [20, стр. 370]), выигрыш возможен только за счет торговли с «чужими» фирмами, часть которых обязательно проиграет.

Утвердительный ответ на поставленный вопрос означает, что исходное равновесие неустойчиво относительно перераспределения начальных запасов. Примеры неустойчивости в этом смысле были продемонстрированы в [49, 40]. В [54] показано, что «большинство» моделей чистого обмена неустойчивы и, следовательно, условия, обеспечивающие устойчивость, должны быть весьма специальными. Достаточные условия устойчивости получены в [27]. Соответствующий результат, непосредственно использующий понятие GS-отображения, формулируется ниже в слегка обобщенном виде.

5.2. Рассмотрим модель $\mathfrak{M}_1(W)$, $W=(w^k,\ k\in M)$, $w^k\in R_+^n$. Коалицией будем называть произвольное непустое подмножество потребителей $\tilde{M}\subset M$.

Определение 5.1. Распределение благ $(\tilde{c}^k,\ k\in M)$ назовем $\tilde{M}$-допустимым в модели $\mathfrak{M}_1(W)$, если оно является равновесным распределением в модели $\mathfrak{M}_1(\tilde{W})$ при некотором $\tilde{W}=(\tilde{w}^k,\ k\in M)$ таком, что $\tilde{w}^k\in R_+^n$,

$$\sum_{k\in M}\tilde{w}^k\leqslant\sum_{k\in M}w^k,\quad \sum_{k\in\tilde{M}}\tilde{w}^k\leqslant\sum_{k\in\tilde{M}}w^k,\quad \tilde{w}^k\geqslant w^k,\ \text{если } k\notin\tilde{M}. \tag{5.1}$$

Согласно (5.1), коалиция может не только перераспределять начальные ресурсы между ее членами, но и уничтожать их частично или полностью, а также передавать участникам вне коалиции. Отметим, что возможность выигрыша за счет уничтожения части запасов (феномен, встречавшийся в практике капиталистических фирм) продемонстрирована на примере в [40]. Условия, при которых выгодна безвозмездная передача части ресурсов партнеру, изучены Баласко [41] в рамках двухпродуктовой модели с двумя участниками.

Определение 5.2. Пусть $(p,\ c^k,\ k\in M)$ — равновесие в модели $\mathfrak{M}_1(W)$. Это равновесие слабо коалиционно устойчиво, если для любой коалиции $\tilde{M}$ и для любого $\tilde{M}$-допустимого распределения $(\tilde{c}^k, k \in M)$ найдется номер $r \in \tilde{M}$ такой, что $u_r(c^r) \geqslant u_r(\tilde{c}^r)$. Если же либо $u_r(c^r) > u_r(\tilde{c}^r)$ для некоторого $r \in \tilde{M}$, либо $u_k(c^k) \geqslant u_k(\tilde{c}^k)$ для всех $k \in \tilde{M}$, то равновесие назовем коалиционно устойчивым.

Из Парето-оптимальности равновесия следует, что единственность по предпочтениям (определение 3.1) является необходимым условием слабой коалиционной устойчивости.

Теорема 5.1. Пусть справедливы предположения $S1$—$S5$ (п. 3.2). Тогда любое равновесие в $\mathfrak{M}_1(W)$ слабо коалиционно устойчиво. Если, сверх того, (A) все отображения $\mathscr{C}^h(p, 1)$ строго нормальны, либо (B) $\mathscr{C}^t(p, 1)$ неразложимо и $w^t \neq 0$ для некоторого t, то любое равновесие коалиционно устойчиво.

Если ни одно из условий (A), (B) не выполняется, то второе утверждение теоремы 5.1 может оказаться неверным [27].

Заметим, что в теореме 5.1 допустимы участники с нулевыми векторами начальных запасов w^h. Это соответствует ситуации, когда коалиция привлекает новых потребителей, ранее лишь потенциально участвовавших в торговле из-за отсутствия средств, или даже создает «искусственного» потребителя (новую фирму) со специальным поведением, которым передает часть своих запасов. Теорема 5.1 показывает, что в этом случае коалиция может получить выгоду для своих членов только при нарушении условий валовой заменимости и нормальности.

5.3. Доказательство теоремы 5.1 использует конструкцию которая оказывается полезной и в других случаях (в частности, для доказательства теоремы 3.2). Фиксируем $W = (w^k$ $k \in M)$, $w^k \geqslant 0$. Положим: $w = \sum_{k=1}^{m} w^k$ и пусть, как и выше, $P_2(B, w)$ — множество (положительных) равновесных цен в модели $\mathfrak{M}_2(B, w)$, $B = (\beta_k, k \in M)$. Пусть выполняются условия $S1-S5$. Если $p, p' \in P_2(B, w)$, то как следует из теоремы 3.5, $pw^k = p'w^k$ $\forall k$. Значение этого скалярного произведения обозначим через $P_2(B, w)w^k$. Введем функцию $\mathscr{H} = (\mathscr{H}_k): \operatorname{int} \mathrm{R}_+^m \to \mathrm{R}^m$,

$$\mathscr{H}_k(B) = P_2(B, w)\, w^k - \beta_k. \tag{5.2}$$

Пусть $\mathscr{H}^0 = \{B \mid \mathscr{H}(B) = 0\}$, а $\mathrm{E}_1(W)$, $\mathrm{E}_2(B, w)$ — множества равновесий в моделях $\mathfrak{M}_1(W)$ и $\mathfrak{M}_2(B, w)$, соответственно.

Лемма 5.1. Пусть $w^k \neq 0$ $\forall k$ и $\mathrm{E}_1(W) \neq \varnothing$. Если выполнены условия $S1-S5$, то

1) $\mathscr{H}(B)$ определена на $\operatorname{int} R_+^n$ и непрерывна;
2) $\mathscr{H}(\lambda B) = \lambda \mathscr{H}(B)$ $\forall \lambda > 0$;
3) $\sum_{k=1}^{m} \mathscr{H}_k(B) \equiv 0$;
4) $\mathscr{H}(B)$ обладает свойством валовой заменимости;

5) $\mathbf{E}_1(W)=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{H}^0}\mathbf{E}_2(B,\ w)$.

Существование $\mathscr{H}(B)$ на $\operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$ следует из теоремы 3.4, а свойство 4) — из теоремы 4.4. Непрерывность легко проверить, используя теорему 4.4. Остальные утверждения вытекают из определений.

Пусть $\xi=(\hat{p},\ \hat{c}^k,\ k\in M)$ и $\eta=(\tilde{p},\ \tilde{c}^k,\ k\in M)$ — равновесия в моделях $\mathfrak{M}_1(\hat{W})$ и $\mathfrak{M}_1(\tilde{W})$, соответственно, причем распределение $(\tilde{c}^k,\ k\in M)$ — $\tilde{M}$-допустимо в $\mathfrak{M}_1(\hat{W})$ при некоторой коалиции $\tilde{M}$. Ниже будет доказано утверждение теоремы 5.1 для модели $\mathfrak{M}_1(\hat{W})$ при дополнительном предположении: $\hat{w}^k\neq 0\ \forall k$.

Введем обозначения

$$\hat{\beta}_k=\hat{p}\hat{w}^k=\hat{p}\hat{c}^k,\quad \tilde{\beta}_k=\tilde{p}\tilde{w}^k=\tilde{p}\tilde{c}^k;\quad \hat{B}=(\hat{\beta}_k),\quad \tilde{B}=(\tilde{\beta}_k);$$

$$\hat{w}=\sum_{k=1}^{m}\hat{w}^k,\quad \tilde{w}=\sum_{k=1}^{m}\tilde{w}^k.$$

Чтобы установить слабую устойчивость, достаточно показать, что $\hat{p}\tilde{c}^r\leqslant\hat{\beta}_r$ для некоторого $r\in\tilde{M}$. Без ограничения общности, считаем, что $\tilde{w}^k\neq 0\ \forall k$. Рассмотрим функцию $\mathscr{H}(B)$, определенную в (5.2), при $w^k=\tilde{w}^k$. Очевидно, $\tilde{B}\in\mathscr{H}^0$. Если $\hat{B}\notin\mathscr{H}^0$, то, применяя теорему 4.1 к функции $\mathscr{H}$, найдем вектор $B'=(\beta_k')$ и номер r такие, что

$$B'\in\mathscr{H}^0,\quad B'\geqslant\hat{B},\quad \beta_r'=\hat{\beta}_r,\quad r\in M^-=\{k\,|\,\mathscr{H}_k(\hat{B})<0\}\tag{5.3}$$

(в силу свойства 3) множество $M^-\neq\varnothing$). Если же $\hat{B}\in\mathscr{H}^0$, то положим: $B'=\hat{B}$. Согласно предложению 1.2 и условиям S, к модели $\mathfrak{M}_1(\tilde{W})$ применима теорема 3.1 о прямом произведении, согласно которой

$$p'\tilde{c}^k=p'\tilde{w}^k=\beta'_k,\quad k\in M,$$

где $p'\in P_2(B',\ \tilde{w})$. Поскольку

$$\hat{p}\in P_2(\hat{B},\ \hat{w}),\quad B'\geqslant\hat{B},\quad \tilde{w}\leqslant\hat{w},$$

по теореме 4.4, получаем

$$\hat{p}\tilde{c}^k\leqslant p'\tilde{c}^k=\beta'_k,\quad k\in M.\tag{5.4}$$

Если $B'=\hat{B}$, то из (5.4) следует, что при любом k вектор $\tilde{c}^k$ не лучше, чем $\hat{c}^k$ для участника k. При $B'\neq\hat{B}$ это верно для некоторого $r\in M^-$ (см. (5.3)). Если же выполнено одно из условий (A) или (B), то, по теореме 4.4, $\hat{p}\tilde{c}^r<\hat{\beta}_r$, а значит, $\tilde{c}^r$ строго хуже, чем $\hat{c}^r$. Остается показать, что $r\in\tilde{M}$. Пусть это не так, тогда $\tilde{w}^r\geqslant\hat{w}^r$. Снова применяя теорему 4.4, будем иметь:

$$0 > \mathscr{H}_r(\hat{B}) = P_2(\hat{B},\ \tilde{w})\tilde{w}^r - \hat{\beta}_r \geqslant \hat{p}\hat{w}^r - \hat{\beta}_r = 0,$$

что невозможно. Итак, при $\hat{w}^k \neq 0$ теорема доказана.

В общем случае функция $\mathscr{H}$ определена на конусе, который определяется равновесиями ξ, η и теоремой 3.4. Поскольку некоторые компоненты $\hat{B}$ могут равняться нулю, теорема 4.1 уже не применима, но (5.3) можно доказать непосредственно, а все последующие рассуждения сохраняют силу.

5.4. Как показано в [28], увеличение дохода участника в $\mathfrak{M}_2(B, s)$ может привести к уменьшению его целевой функции в новом равновесии, однако условия в. з. и нормальности исключают такой феномен. Эти же условия обеспечивают коалиционную устойчивость относительно перераспределения доходов в $\mathfrak{M}_2(B, s)$ [27].

§ 6. ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЦЕН

6.1. Значительное число экономико-математических работ посвящено исследованию устойчивости процесса регулирования цен, задаваемого системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = \mathscr{F}(p). \tag{6.1}$$

Здесь правая часть связана некоторыми соотношениями с функцией избыточного спроса $\mathscr{D}$, например, пропорциональна ей, либо удовлетворяет условиям

$$\operatorname{sign} \mathscr{F}_i(p) = \operatorname{sign} \mathscr{D}_i(p), \quad i = 1, \ldots, n, \ \forall p, \tag{6.2}$$

где

$$\operatorname{sign} x \doteq \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Уравнение (6.1) рассматривается как модель поведения цен в условиях совершенной конкуренции. Оно призвано отразить тот факт, что при наличии многих продавцов данного товара его цена обычно растет, если спрос превосходит предложение, и убывает — в противном случае.

В советской экономической литературе принята другая интерпретация процессов типа (6.1), соответствующая пониманию моделей равновесия как схем согласования решений в плановой экономике. Согласно этой интерпретации, уравнение (6.1) описывает правило, позволяющее планирующему органу найти сбалансированный план в процессе подбора равновесных цен [8]. Важно, что для организации такого процесса используется лишь знание текущих значений избыточного спроса и не требуется детальная информация о целевых функциях и технологии локальных объектов.

Дискретные аналоги уравнений (6.1) могут использоваться как алгоритмы вычисления равновесных цен и планов.

Проблема исследования устойчивости решений уравнения (6.1) в экономическом контексте была сформулирована Самуэльсоном [75]. В [55, 69] было показано, что в случае дифференцируемой GS-функции $\mathscr{D}=\mathscr{F}$ (удовлетворяющей определенным дополнительным предположениям) процесс локально устойчив. Первые глобальные результаты были получены Эрроу и Гурвицем [37] и Эрроу, Блоком и Гурвицем [35] для строгой валовой заменимости; нестрогий случай рассматривался в [38, 64, 86]. Обзор этих и ряда других работ можно найти в [70], [36, гл. 11—13], [10, гл. 9], [20, гл. VI]. Радер [74], рассматривая специальную модель равновесия с производством, показал, что для обеспечения локальной асимптотической устойчивости достаточно потребовать в. з. для функции спроса (а не избыточного спроса), поскольку функция предложения $S(p)$ автоматически удовлетворяет условию монотонности: $(p-q)(S(p)-S(q))\geqslant 0\ \forall p, q$.

В [43] приведена оценка скорости сходимости процесса регулирования цен в окрестности равновесия.

Во всех цитированных работах функция $\mathscr{D}$ предполагалась положительно однородной нулевой степени, обычно постулировалось тождество Вальраса. Для получения глобальных результатов использовался второй метод Ляпунова.

Недавно Ховитт [57] доказал глобальную устойчивость для дифференциального включения с правой частью, заданной AGS-отображением при дополнительном условии, обеспечивающем единственность равновесных цен (с точностью до нормировки). Ниже будут доказаны две теоремы, обобщающие этот результат (см. п. 6.4).

В однозначном случае, наряду с (6.1), во многих работах [37, 35, 86, 10] изучался так называемый нормализованный (или нормированный) процесс, в котором фиксируется цена «эталонного» товара. Рассматривался также ряд других модификаций процесса (6.1). Если равновесный вектор не предполагается строго положительным, то необходимо исключить возможность выхода за границу R_+^n. Для этого к (6.1) добавляют то или иное условие «отражения от границы» [38, 64, 86]. Более серьезная модификация связана с предположением, что цены меняются в соответствии с ожидаемым, а не фактическим спросом. Это приводит к усложнению модели. Ряд результатов такого рода содержится в [39, 10]. Дальнейшего развития они пока не получили.

6.2. Для избыточного спроса $\mathscr{D}(p)$, который может быть неоднозначным, процесс регулирования цен с непрерывным временем можно задать дифференциальным включением

$$\frac{dp}{dt}\in\mathscr{F}(p), \tag{6.3}$$

где отображение $\mathscr{F}$ удовлетворяет следующему условию сохранения знака:

$F1$. Для любых векторов $p=(p_i)$, $f=(f_i)$ таких, что $f\in\mathscr{F}(p)$ найдется $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$, для которого выполнены соотношения $\operatorname{sign} f_i=\operatorname{sign} d_i$ для всех i.

Включение (6.3) задает нормализованный процесс с фиксированной ценой эталонного продукта n, если $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию:

$F2$. Для любых $p=(p_i)$, $f=(f_i)$, таких, что $f\in\mathscr{F}(p)$, выполняются равенства $f_n=0$ и $\operatorname{sign} f_i=\operatorname{sign} d_i$, $i\neq n$, для некоторого $d=(d_i)\in\mathscr{D}(p)$.

Пусть $\mathscr{F}$ определено на множестве $V\subset R^n$, $p^0\in V$, T — положительное число. Функцию $p:[0,T]\to V$ называют решением дифференциального включения (6.3) на отрезке $[0,T]$ при начальных условиях $p(0)=p^0$, если она абсолютно непрерывна, $p(0)=p^0$ и $\frac{dp(t)}{dt}\in\mathscr{F}(p(t))$ для почти всех t. Функция $p(t)$ — решение (6.3) на $[0,+\infty)$ при $p(0)=p^0$, если она является решением (6.3) на $[0,T]$ для любого $T>0$ при тех же начальных условиях. В этом случае $p(t)$ называют также траекторией процесса (6.3).

Точку $q\in V$ называют равновесной, если $0\in\mathscr{D}(q)$. Как и выше, $\mathscr{D}^0=\{q\,|\,0\in\mathscr{D}(q)\}$. Следующее определение устойчивости процесса регулирования цен является обобщением этого понятия на случай неоднозначного избыточного спроса.

Определение 6.1. ([57], см также [86, 44]). Процесс (6.3) квазиустойчив, если для всякого $p^0\in V$ траектория с началом в p^0 существует, каждая траектория ограничена и все ее предельные точки* принадлежат $\mathscr{D}^0$. Процесс устойчив, если он квазиустойчив и всякая траектория имеет только одну предельную точку.

Отметим, что используемая здесь терминология отличается от принятой в математической теории устойчивости.

Далее будем предполагать, что $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям A1, A2 и A3 (см. п. 1.6). При этом будем использовать условие A1 и для $\mathscr{F}$.

Таким свойством обладает, например, отображение $\mathscr{F}$, определенное следующим образом

$$\mathscr{F}(p)=\Gamma(p)\mathscr{D}(p)=\{f\,|\,f=\Gamma(p)d,\ d\in\mathscr{D}(p)\},\tag{6.4}$$

где $\Gamma(p)$ — диагональная матрица, непрерывно зависящая от p; $\gamma_i(p)$ — ее диагональные элементы. Если все функции $\gamma_i(p)$ положительны, то выполняется F1; если же $\gamma_n(p)\equiv 0$, $\gamma_i(p)>0$, $i\neq n$, то $\mathscr{F}$ удовлетворяет F2 и задает нормализованный процесс.

---

* $\bar{p}$ — предельная точка траектории, если $p(t^\nu)\to\bar{p}$ для некоторой последовательности $t^\nu\to+\infty$.

В п. 6.4 будут доказаны теоремы устойчивости для процесса (6.3). Предварительно установим свойства и существование траекторий этого процесса.

Для векторов $p=(p_i)$, $q=(q_i)\in\operatorname{int} R_+^n$ определим

$$\lambda(p, q)=\max_{i\in N} p_i/q_i, \quad \mu(p, q)=\min_{i\in N} p_i/q_i, \tag{6.5}$$

где $N=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Следующая лемма играет важную роль для доказательства устойчивости процесса регулирования цен (6.3).

Лемма 6.1. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A2, A3, а для отображения $\mathscr{F}$ выполняется одно из условий F1, F2. Если $q\in\mathscr{D}^0$ и функция $p(t)$ является решением дифференциального включения (6.3) на отрезке $[0, T]$ при некотором $T>0$, то функция $\lambda(p(t), q)$ не возрастает, а $\mu(p(t), q)$ не убывает на $[0, T]$.

Если при этом q — единственный вектор (с точностью до скалярного множителя), содержащийся в $\mathscr{D}^0$, а разность $\lambda(p(t), q)-\mu(p(t), q)$ постоянна на $[0, T]$, то $p(t)=\alpha q$ для всех $t\in[0, T]$ при $\alpha=\lambda(p(0), q)=\mu(p(0), q)$.

Доказательство. Обозначим $l(t)=\lambda(p(t), q)$, $m(t)=\mu(p(t), q)$. Для любого $t\in[0, T]$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} l(t)q, \quad m(t)q\in\mathscr{D}^0, \quad l(t)q\geqslant p(t)\geqslant m(t)q, \\ I_l(t)=\{i\mid p_i(t)=l(t)q_i\}\neq\varnothing, \quad I_m(t)=\{i\mid p_i(t)=m(t)q_i\}\neq\varnothing. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Используя следующие тождества (a, b — действительные числа):

$$\max\{a, b\}\equiv(a+b+|a-b|)/2, \quad \min\{a, b\}\equiv(a+b-|a-b|)/2,$$

нетрудно проверить, что $l(t)$, $m(t)$ абсолютно непрерывны. Поэтому почти всюду на $[0, T]$ существуют производные функций $l(t)$, $m(t)$, $p(t)$ (будем обозначать их $\dot{l}(t)$, $\dot{m}(t)$, $\dot{p}(t)$) и, в силу (6.6), выполняются следующие соотношения для любых $j\in I_l(t)$ и $s\in I_m(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{l}(t)&=q_j^{-1}\lim_{h\to+0} h^{-1}(l(t+h)q_j-l(t)q_j)\leqslant \\ &\leqslant q_j^{-1}\lim_{h\to+0} h^{-1}(p_j(t+h)-p_j(t))=q_j^{-1}\dot{p}_j(t), \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \dot{m}(t)&=q_s^{-1}\lim_{h\to+0} h^{-1}(m(t+h)q_s-m(t)q_s\geqslant \\ &\geqslant q_s^{-1}\lim_{h\to+0} h^{-1}(p_s(t+h)-p_s(t))=q_s^{-1}\dot{p}_s(t). \end{aligned} \tag{6.8}$$

По теореме 4.1 из (6.6) и включения $\dot{p}(t)\in\mathscr{F}(p(t))$ следует (в силу любого из условий F1, F2), что для почти каждого $t\in[0, T]$ найдутся свои $j\in I_l(t)$, $s\in I_m(t)$ такие, что $\dot{p}_j(t)\leqslant 0$, $\dot{p}_s(t)\geqslant 0$. Поэтому $\dot{l}(t)\leqslant 0$, $\dot{m}(t)\geqslant 0$ почти всюду на $[0, T]$.

Ввиду абсолютной непрерывности $l(t)$ и $m(t)$ из этого следует первое утверждение леммы.

В случае, когда $\mathscr{D}^0$ — луч, из теоремы 4.1 и соотношений (6.6), (6.7), (6.8) следует (в силу F1 или F2), что $\dot{l}(t)-\dot{m}(t)<0$ для почти всех t таких, что $p(t)\notin\mathscr{D}^0$. Поэтому при дополнительных условиях леммы, для почти всех t имеем: $p(t)\in D^0$ $p(t)=l(t)q=m(t)q$. Из этого, в силу свойств функций $p(t)$, $l(t)$ и $m(t)$, следует второе утверждение леммы, ч. т. д.

В лемме 6.1 существование решения дифференциального включения (6.3) предполагается. В следующем пункте будут даны условия существования траекторий этого процесса.

6.3. Рассмотрим компакт

$$K=\{p\,|\,\alpha\leqslant\mu(p,q)\leqslant\lambda(p,q)\leqslant\beta\},\tag{6.9}$$

где λ и μ определены в (5.6), $\beta>\alpha>0$ и $q\in\mathscr{D}^0$. Пусть $C_u([0,T];K)$ — пространство непрерывных функций на $[0,T]$ со значениями в K, наделенное топологией равномерной сходимости.

Следующее утверждение можно доказать по схеме, указанной в [44].

Теорема 6.1. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A2, A3, а для отображения $\mathscr{F}$ выполняются A1 и одно из условий F1, F2. Тогда для всякого положительного компакта K вида (6.9) и любой его точки p^0 найдутся траектории процесса (6.3), начинающиеся в p^0. При этом: (1) любая из этих траекторий не выходит из K; (2) множество $S_T(p^0)$ исходящих из p^0 *начальных отрезков траекторий для* $t\in[0,T]$ *является* непустым компактом в $C_u([0,T];K)$; отображение S_T полунепрерывно сверху на K.

Из этой теоремы следует существование положительных траекторий процесса (6.3), начинающихся в любой заданной точке из $\operatorname{int}\mathbf{R}_+^n$.

Для доказательства строится вспомогательное ограниченное отображение $\mathscr{G}$, определенное, в отличие от $\mathscr{F}$, на всем $\mathbf{R}^n$ и совпадающее с $\mathscr{F}$ на некотором положительном компакте, внутренность которого содержит K (см. [57]). Для вспомогательного процесса

$$\frac{dp}{dt}\in\mathscr{G}(p)\tag{6.10}$$

траектории существуют, согласно теореме Кастэна—Валадье (см. теорему A1 в [44, стр. 292—293]). Их начальные отрезки являются решениями (6.3). Из леммы 6.1 следует, что траектории процессов (6.10) и (6.3), начинающиеся в K, совпадают при всех t и не выходят из K. Из теоремы Кастэна—Валадье вытекают свойства (2) и (3).

6.4. Переходим к анализу устойчивости (6.3). Согласно [44], функцией Ляпунова процесса (6.3) на замкнутом множестве $V\subset\mathbf{R}^n$ называется непрерывная функция $\mathscr{G}:V\to\mathbf{R}^1$ такая, что: (1) для каждой траектории $p(t)$ этого процесса, содержащейся в V, функция $\mathscr{L}(p(t))$ имеет предел при $t \to +\infty$; (2) если существует траектория $p(t)$, начинающаяся в V, такая, что для некоторого $T>0$ функция $\mathscr{L}(p(t))$ постоянна на $[0, T]$, то $\mathscr{F}(p(0)) \ni 0$.

Если выполнены все условия леммы 6.1, то $\mathscr{L}(p) = \lambda(p, q) - \mu(p, q)$ является функцией Ляпунова процесса (6.3) на любом положительном компакте K вида (6.10). Поэтому теорема о квазиустойчивости работы [44] может быть использована для доказательства следующей теоремы устойчивости процессов регулирования цен (6.3) (нормализованного и ненормализованного) для системы с валовой заменимостью избыточного спроса.

Теорема 6.2. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A2, A3, а для отображения $\mathscr{F}$ выполняются A1 и одно из условий F1 и F2. Тогда если существует равновесный вектор $q \in \mathscr{D}^0$ и он единственен (с точностью до скалярного множителя), то процесс (6.3) устойчив на $\operatorname{int} \mathbf{R}_+^n$.

Доказательство. Так как $\mathscr{L}(p) = \lambda(p, q) - \mu(p, q)$ функция Ляпунова процесса (6.3) на компакте K вида (6.10), то из теоремы 6.1 работы [44] (ввиду утверждений (1), (2) и (3) теоремы 6.1 предыдущего пункта настоящей работы) следует, что всякая предельная точка $\bar{p}$ любой траектории $p(t)$ принадлежит $\mathscr{F}^0 = \{p \mid \mathscr{F}(p) \ni 0\}$. В силу условий доказываемой теоремы, $\mathscr{F}^0 \subset \mathscr{D}^0$. Таким образом, процесс (6.3) квазиустойчив.

Ввиду леммы 6.1, функции $\lambda(p(t), \bar{p})$ и $\mu(p(t), \bar{p})$ имеют пределы при $t \to +\infty$. Так как $\bar{p} = \lim\limits_{\nu \to +\infty} p(t^\nu)$ для некоторой последовательности $t^\nu \to +\infty$, то из определения λ и μ следует, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda(p(t), \bar{p}) = \lim\limits_{t \to +\infty} \mu(p(t), \bar{p}) = 1$. Поскольку

$$\lambda(p(t), \bar{p})\, \bar{p} \geqslant p(t) \geqslant \mu(p(t), \bar{p})\, \bar{p},$$

то $p(t) \to \bar{p}$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Отметим, что во многих работах доказательство устойчивости основывалось на утверждениях, подобных лемме 6.1 и теореме 6.1, с использованием той же функции Ляпунова $\mathscr{L}(p) = \lambda(p, q) - \mu(p, q)$ (см., например, [35, 57]).

Результаты, приведенные в п. 3.2, дают примеры ситуаций, для которых в модели чистого обмена с многозначным избыточным спросом (удовлетворяющим условиям теоремы 6.2) равновесные цены единственны. Однако так бывает не всегда.

В случае, когда равновесные цены могут быть неединственными, справедлива следующая теорема для GS-отображения, удовлетворяющего условию A4 (тождество Вальраса, п. 1.6), более сильному, чем A3. Из нее следует устойчивость частного вида нормализованного и ненормализованного процессов регулирования цен.

Теорема 6.3. Пусть GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет условиям A1, A2, A4, а отображение $\mathscr{F}$ определяется соотношениями (6.4) с постоянной неотрицательной диагональной матрицей Γ, диагональные элементы γ_i которой положительны для $i \neq n$. Тогда если $\mathscr{D}^0 \neq \varnothing$, то процесс (6.3) устойчив на $\operatorname{int} R_+^n$.

Доказательство. Согласно теореме 2.5 (п. 2.6), имеют место следующие соотношения

$$qd \geqslant 0 \text{ при } q \in \mathscr{D}^0,\ d \in \mathscr{D}(p),\ p \in \operatorname{int} R_+^n,$$
$$\text{причем } qd > 0 \text{ для } p \notin \mathscr{D}^0. \tag{6.11}$$

Из A4 следует, что $\mathscr{F}^0 = \mathscr{D}^0$. Для некоторого $q^* \in \mathscr{D}^0$ построим функцию

$$\mathscr{L}(p) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^{-1}(p_i - q_i^*)^2, \text{ где } \nu = \begin{cases} n, & \gamma_n > 0, \\ n-1, & \gamma_n = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Для всякой траектории $p(t)$ процесса (6.3) для любого $T > 0$ почти всюду на $[0, T]$ существуют производные

$$\frac{d\mathscr{L}(p(t))}{dt} = -2q^* d^t, \text{ где } d^t = (d_i^t) \in \mathscr{D}(p(t)),\ \gamma_i d_i^t = \frac{dp_i(t)}{dt}.$$

Поэтому из (6.11) следует, что $\mathscr{L}(p)$ является функцией Ляпунова процесса (6.3).

Остальная часть доказательства вполне аналогична доказательству теоремы 6.2.

Заметим, что функция (6.12) убывает вдоль траекторий. Поэтому в условиях теоремы 6.3 при $\gamma_i = 1$, $i \neq n$, всякая траектория процесса (6.3) сходится к равновесной точке *монотонно (по евклидовой норме)*.

Отметим, что для систем с однозначным избыточным спросом (при валовой заменимости и тождестве Вальраса) функция (6.12) в случае неединственности равновесных цен также с успехом применялась для доказательства устойчивости процесса регулирования, рассмотренного в теореме 6.3, [35, 38]. Ее использование основывалось, как и в теореме 6.3, на неравенствах (6.11), которые были известны для однозначного случая (см. [35, 38]).

6.5. Для многозначного неоднородного GS-отображения процесс (6.1) не исследовался. Однако однозначный случай рассматривался в ряде работ [13, 14, 21, 79, 89]. Приведем довольно общий результат из [79].

Теорема 6.4. Пусть GS-функция $\mathscr{F}(p)$ определена и непрерывна на множестве $P = \{p \mid v \leqslant p \leqslant r\}$, где v, $r \in R_+^n$, $\mathscr{F}(r) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{F}(v)$. Если траектории $p(t)$ уравнения (6.1) сходятся к некоторой точке $p^* = (p_i^*) \in P$ независимо от начального состояния $p(0) \in P$, то

$$\min_i (q_i - p_i^*)\mathcal{F}_i(q) < 0 \quad \forall q = (q_i) \in P, \quad q \neq p^*. \tag{6.13}$$

Обратно, если для некоторого $p^* \in P$ имеет место (6.13), то p^* — единственное равновесие и $p(t) \to p^*$ при $t \to \infty$ $\forall p(0) \in P$.

В [79] показано также, что в условиях теоремы 6.4 требование (6.13) выполняется, если $\forall p,\ q \in P$ таких, что $q \geqslant p$, $q \neq p$, найдется координата i, для которой $f_i(q) < f_i(p)$.

Отметим, что если в модели $\mathfrak{M}_2(B, s)$ с фиксированными доходами индивидуальные функции спроса $\mathscr{C}^k(p, \beta)$ удовлетворяют предположениям $S1$—$S5$ (см. п. 3.2), дифференцируемы и строго положительны, то выполнены неравенства:

$$(p-q)(\mathscr{C}^k(p,\beta) - \mathscr{C}^k(q,\beta)) < 0 \quad \forall p, q \in \operatorname{int} \mathrm{R}_+^n, \quad \beta \in \operatorname{int} \mathrm{R}_+^1. \tag{6.14}$$

Из этого факта, доказанного в [24], следует, что избыточный спрос подчиняется требованию (6.13). Используя существование равновесия и нормальность и применяя теорему 6.4, нетрудно показать устойчивость процесса (6.1). По-видимому, справедлив следующий результат, обобщающий теорему 2.5 и соотношение (6.14): если GS-отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет A1, A3 и нормально, то $(p-q)d \leqslant 0$ для всех p, q, d таких, что $d \in \mathscr{D}(p)$, $p \in \operatorname{int} R_+^n$, $q \in \mathscr{D}^0$, причем для $p \notin \mathscr{D}^0$ имеет место строгое неравенство. Однако доказательство этого предложения пока отсутствует.

6.6. Процессы регулирования цен в дискретном времени впервые рассматривал Узава [85]. Один из процессов, предложенных в [85], задается соотношениями

$$p_i(t+1) = \max\{0, p_i(t) + \rho\mathscr{D}_i(p(t))\}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$t = 0, 1, \ldots, \quad p_n \equiv 1, \quad p(0) = p^0 \geqslant 0, \quad p^0 \neq 0. \tag{6.15}$$

Узава не исключает случай нулевых цен на некоторые продукты. При этом вектор цен $q \geqslant 0$ называется равновесным, если $\mathscr{D}(q) \leqslant 0$, $q\mathscr{D}(q) = 0$.

Теорема 6.5 [85]. Пусть функция $\mathscr{D}(p) = (\mathscr{D}_i(p))$ определена в некоторой окрестности R_+^n, удовлетворяет A2, A4 и дважды непрерывно дифференцируема, причем матрица с общим членом $a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 \mathscr{D}_i}{\partial p_j \partial p_k}$ невырождена в некоторой точке равновесия. Если для равновесного вектора q справедливо условие

$$q\mathscr{D}(p) > 0 \quad \forall p \neq q, \tag{6.16}$$

а величина ρ достаточно мала, то $\lim_{t\to\infty} p(t) = q$ при любом $p^0 \in R_+^n$.

В условиях теоремы 6.5 неравенство (6.16) следует из валовой заменимости и неразложимости (см. теорему 2.5).

Система (6.15) задает нормированный процесс регулирования цен. Ненормированный процесс при строгой в. з. рассматривался в [10, стр. 378] (доказательство его устойчивости содержит пробелы).

Если GS-функция $\mathscr{D}$ не является гладкой, то, по-видимому, процесс (6.15) может расходиться для любого фиксированного ρ. В [23] доказана сходимость следующего ненормированного процесса с переменным шагом (для многозначного случая).

$$p(t+1)=\max\left\{h;\ p(t)+\rho(t)\frac{d(t)}{\|d(t)\|}\right\},\quad d(t)\in\mathscr{D}(p(t)),$$
$$p(0)=p^0\geqslant h, \qquad (6.17)$$

где h — фиксированный (малый) положительный вектор. Процесс (6.17) определен при $d(t)\neq 0$; считаем, что при $d(t)=0$ он останавливается.

Теорема 6.6 [23]. Предположим, что отображение $\mathscr{D}$ удовлетворяет А1, А4, множества $\mathscr{D}(p)$ ограничены снизу в совокупности, $\mathscr{D}^0\cap\{p\,|\,p\geqslant h\}\neq\varnothing$, и выполнено (6.11). Пусть кроме того,

$$\rho(t)\geqslant 0,\quad \sum_{t=1}^{\infty}\rho(t)=\infty,\quad \sum_{t=1}^{\infty}\rho^2(t)<\infty.$$

Тогда последовательность (6.17) сходится ко множеству $\mathscr{D}^0$.

Отметим, что из приведенного в [23] доказательства фактически следует сходимость к точке из $\mathscr{D}^0$.

Используя теорему 2.5, нетрудно переформулировать теорему 6.6 для GS-отображений.

Процессы, близкие к (6.15), рассматривались также в [5] (см., в особенности, стр. 139) и в [21, гл. 9]. К описанным процедурам примыкают разработанные в последние годы алгоритмы решения вариационных неравенств (см. обзор [2]), позволяющие после модификации отображения $\mathscr{D}$ применить процесс с постоянным шагом. Однако известные результаты о сходимости таких алгоритмов опираются на условия, отличные от предположений теоремы 6.6.

Узава [85] предложил также для отыскания нулей GS-функции процесс поочередного изменения цен, подобный известному методу Гаусса—Зайделя. Пусть $p(t)=(p_i(t))$ — вектор цен на t-ой большой итерации и уже определены $p_i(t+1)$ при $i=1,\ldots,j-1$. Тогда, согласно Узаве, значение $p_j(t+1)$ определяется на j-ой малой итерации как решение уравнения

$$\mathscr{D}_j(p_1(t+1),\ldots,p_{j-1}(t+1),v,p_{j+1}(t),\ldots,p_n(t))=0 \quad (6.18)$$

относительно переменной v.

Теорема 6.7 [85]. Если строгая GS-функция $\mathscr{D}$ определена и непрерывна на $\operatorname{int} R_+^n$, удовлетворяет А2, А4 и $\mathscr{D}^0\neq\varnothing$, то описанный процесс сходится к единственному равновесному вектору.

Для доказательства этой теоремы Узава применил в качестве функции Ляпунова $\mathscr{L}(p)=\lambda(p, q)-\mu(p, q)$, где λ, μ определены в (6.5), $q\in\mathscr{D}^0$.

В [11] показано, что если GS-функция не является строгой, то процесс поочередного изменения цен может расходиться. Предложено выбирать на каждом шаге номер j уравнения (6.18) случайно, в соответствии с заранее заданным распределением вероятностей $\pi_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(t)=1$, $\pi_i(t)$ отделены от нуля.

При вычислении корня уравнения (6.18) координата j увеличивается, если $\mathscr{D}_j>0$, и уменьшается, если $\mathscr{D}_j<0$. Среди решений уравнения (6.18) берется то, которое «встретится впервые», оно требует наименьшего изменения j-ой цены. В [11, 17] доказано, что так модифицированный процесс сходится при условиях теоремы 6.7 даже, если потребовать только валовой заменимости вместо строгой валовой заменимости. При этом нет необходимости на каждом шаге отыскивать точное решение (6.18). Если $\hat{p}_j(t+1)$ — ближайшее к $p_j(t)$ решение (6.18), то можно полагать: $p_j(t+1)=p_j(t)+\alpha_j(t)(\hat{p}_j(t+1)-p_j(t))$, где $1\geqslant\alpha_j(t)\geqslant\rho>0$. В [17] при тех же основных предположениях доказана сходимость более общего процесса, предусматривающего возможность одновременного изменения нескольких переменных.

6.7. Среди алгоритмов вычисления равновесного вектора в условиях в. з. следует отметить чрезвычайно простую и эффективную процедуру, являющуюся модификацией метода простой итерации. Она была разработана в [3, 4, 6] для модели нелинейного межотраслевого баланса. Рассмотрим ее в несколько обобщенном варианте [9].

Если $\mathscr{D}$ — непрерывная GS-функция на R_+^n и множество $\{p\,|\,p\geqslant 0,\ \mathscr{D}(p)\geqslant 0\}$ ограничено сверху, то оно содержит максимальную точку q, причем $\mathscr{D}(q)=0$ (п. 2.4). Пусть для некоторых $\tilde{k}_i>0$ функция $\mathscr{D}$ удовлетворяет условию

$$\mathscr{D}_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)-$$
$$-\mathscr{D}_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i+\delta, p_{i+1}, \ldots, p_n)\leqslant \tilde{k}_i\delta, \quad i=1, \ldots, n,$$

при любом $\delta\geqslant 0$ и любом p таком, что $q\leqslant p\leqslant\tilde{q}$, $\tilde{q}$ — некоторый вектор. Тогда следующий процесс сходится к вектору q

$$p_i(t+1)=\min\left\{p_i(t),\ p_i(t)+\frac{1}{k_i}\mathscr{D}_i(p(t))\right\},$$
$$k_i\geqslant\tilde{k}_i, \quad i=1, \ldots, n, \quad p(0)=\tilde{q}, \tag{6.19}$$

причем все координаты $p(t)$ не возрастают. В ряде случаев, например, в моделях с фиксированными доходами, найти подходящий начальный вектор $\tilde{q}$ не представляет труда.

Аналогично (6.19) строится алгоритм отыскания минимальной точки множества $\mathscr{D}^-$ [3, 6, 9], обеспечивающий неубывание всех координат.

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предположение о валовой заменимости товаров является весьма ограничительным с экономической точки зрения. Поэтому предпринимались многочисленные попытки распространить результаты, полученные при этом предположении, на более широкий класс ситуаций.

Самая простая возможность обобщения состоит в следующем. Будем говорить, что отображение $\mathscr{D}$ обладает свойством валовой дополнительности (в. д.), если $(-\mathscr{D})$ является GS-отображением. Термин «в. д.» для однозначного спроса введен Мосаком [68], близкое понятие можно найти у Хикса [56]. Условия A1, A2, A4 (п. 1.6), A5 (п. 2.3) и ряд других допущений, использованных выше, остаются справедливыми при перемене знака. Поэтому приведенные результаты применимы и в случае в. д. (при этом A3 следует заменить на A4).

Моришима [67] предложил разбить все товары (кроме эталонного) на две группы так, что внутри каждой группы имеет место строгая в. з., а для товаров, относящихся к разным группам — строгая в. д. Эталонный товар он подчиняет специальным условиям. Для гладких функций избыточного спроса, удовлетворяющих также ряду других предположений, в [67] доказана единственность равновесного вектора и устойчивость процесса типа (6.1). «Рынок», включающий в. з. и в. д. одновременно, рассматривался также в [21].

Хотя существование равновесия доказано при весьма общих предположениях (см., например, [36, 20, 22]), необходимые и достаточные условия известны лишь для линейных моделей [50]. Неясно, остаются ли справедливыми теоремы существования типа теоремы 3.4 для более широкого класса ситуаций, когда требование в. з. может не выполняться.

Обзоры результатов о единственности равновесных векторов содержится в [51, 20, 36, 13, 21]. Соотношение (6.11) и некоторые другие варианты условия «выявленного предпочтения» [35, 38, 24] (см. также [8, стр. 138]) влекут за собой выпуклость множества равновесных цен или единственность равновесия, а также устойчивость процессов типа (6.1) (при $\mathscr{F}=\mathscr{D}$). Другое условие, более общее, чем строгая в. з. в гладком случае, также гарантирующее единственность и устойчивость равновесия, состоит в том, что якобиева матрица избыточного спроса в любой точке должна обладать доминирующей диагональю [63, 72] (см. также, [10, 36]). В [13, 14] дано представление двух вариантов этого требования в форме конечных приращений.

По-видимому, оно применимо и для многозначного случая, но этот вопрос не исследовался.

Кроме рассмотренных в § 6 процессов регулирования цен, известен также целый ряд других. Изучение некоторых из них опирается на условия типа (6.11), но используются и совсем другие допущения. Обзор соответствующих результатов можно найти в [36, гл. 13], а также в [86, 52]. Из недавних исследований, посвященных этому вопросу, отметим работу Смейла [83].

К сожалению, очень мало известно о том, какие требования к целевым функциям обеспечивают выполнение тех или иных условий, налагаемых на избыточный спрос.

Возможность обобщения теорем сравнительной статики изучалась в [62, 53, 73]. Полученные результаты показывают, что существенно ослабить требование в. з. нельзя.

Пока что теорема 3.1 и результат об эквивалентности равновесий при их неединственности (следствие 3.1) не имеют обобщений. Это же относится и к теореме 5.1 коалиционной устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багриновский К. А.*, Основы согласования плановых решений. М., Наука, 1977, 303 с.
2. *Бакушинский А. Б.*, Методы решения вариационных неравенств. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1977, *17*, № 6, 1350—1362
3. *Беленький В. З.*, Некоторые модели оптимального планирования, основанные на схеме межотраслевого баланса. Экон. и мат. методы, 1967, *3*, № 4, 539—549 (РЖМат, 1968, 11В417)
4. —, О задачах математического программирования, обладающих минимальной точкой. Докл. АН СССР, 1968, *183*, № 1, 15—17 (РЖМат, 1969, 3В310)
5. —, *Волконский В. А., Иванков С. А., Поманский А. Б., Шапиро А. Д.*, Итеративные методы в теории игр и программировании. М., Наука, 1974, 239 с. (РЖМат, 1974, 10В534К)
6. *Ваксман В. С.*, О нелинейной модели межотраслевого баланса и методах ее приближенного решения. Экономика химической промышленности (техн. и экон. информация). Вып. 6, М., НИИТЭХИМ, 1967, 84—92
7. *Ваксман Т. Ф., Дудкин Л. М.*, Экономико-математические задачи с явным и неявным клювом. Тр. 4-й Зимн. школы по мат. программир. и смеж. вопросам, 1971. Вып. I. М., 1971, 166—174 (РЖМат, 1972, 6В445)
8. *Волконский В. А.*, Принципы оптимального планирования. М., «Экономика», 1973, 239 с.
9. *Гершкович Ю. Б., Полтерович В. М.*, Оптимизация нелинейных систем с прямыми отрицательными связями. Тр. Моск. ин-т нефтехим. и газ. пром-сти, 1977, № 131, 4—12 (РЖМат, 1979, 3В703)
10. *Карлин С.*, Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., Мир, 1964, 838 с. (РЖМат, 1964, 11В321К)
11. *Крупенина Г. А., Мовшович С. М.*, Об устойчивости одного процесса регулирования цен. Экон. и мат. методы, 1974, *10*, № 5, 1013—1015 (РЖМат, 1975, 1В812)
12. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.*, Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., Наука, 1973, 335 с. (РЖМат, 1974, 5В728К)
13. *Малишевский А. В.*, Модели совместного функционирования многих целе-

направленных элементов. I. Автомат. и телемех., 1972, № 11, 92—110 (РЖМат, 1973, 3В294)
14. —, Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов. II. Автомат. и телемех., 1972, № 12, 108—129 (РЖМат, 1973, 4В377)
15. *Меєров М. В.*, Оптимизация многосвязных систем в динамике. Автомат. и телемех., 1979, № 7, 36—42
16. —, *Литвак Б. Л.*, Оптимизация систем многосвязного управления. М., Наука, 1972, 344 с. (РЖМат, 1974, 6В572К)
17. *Мовшович С. М.*, Об устойчивости одного случайного процесса регулирования цен. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 2, 442—446 (РЖМат, 1976, 9В349)
18. —, *Христович Н. Л.*, Валовая заменимость в моделях распределения. Экон. и мат. методы, 1975, *11*, № 5, 999—1001 (РЖМат, 1976, 2В818)
19. *Моришима М.*, Равновесие, устойчивость, рост. М., Наука, 1972, 280 с.
20. *Никайдо Х.*, Выпуклые структуры и математическая экономика. М., Мир, 1972, 517 с. (РЖМат, 1972, 11В440К)
21. *Опойцев В. И.*, Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М., Наука, 1977, 245 с.
22. —, Теоремы существования в задачах системостатики. Автомат. и телемех., 1979, № 3, 85—95 (РЖМат, 1979, 7В860)
23. *Полтерович В. М.*, Об устойчивости некоторых процессов распределения фондов и регулирования цен. В сб. «Мат. экон. и функц. анализ», М., Наука, 1974, 203—232 (РЖМат, 1975, 4В661)
24. —, Модели равновесного экономического роста. Экон. и мат. методы, 1976, *12*, № 3, 527—540 (РЖМат, 1976, 12В882)
25. —, Оптимальное распределение благ при неравновесных ценах. Экон. и мат. методы, 1980, *16*, № 4, 746—759
26 —, *Спивак В. А.*, Валовая заменимость многозначных отображений и структура равновесных множеств. Препр. Центр. экон.-мат. ин-т. АН СССР. М., 1978, 43 с. (РЖМат, 1979, 6В873)
27. —, —, Коалиционная устойчивость экономического равновесия. Препр. Центр. экон.-мат. ин-т. АН СССР, М., 1978, 44 с.
28. —, —, Бюджетный парадокс в модели экономического равновесия. Экон. и мат. методы, 1979, *15*, № 1, 115—127 (РЖМат, 1979, 6В872)
29. —, —, Сравнение равновесий при многозначном спросе. В сб. «Методы теории экстремальных задач в экономике». М., Наука, 1981, 178—192
30. *Слуцкий Е. Е.*, К теории сбалансированного бюджета потребителя. В сб. Экон.-матем. методы. Вып. 1. М., АН СССР, 1963, 241—277 (РЖМат, 1965, 5В211)
31. *Спивак В. А.*, Исследование модели обмена с валовой зависимостью. Препр. Центр. экон.-мат. ин-т. АН СССР, М., 1980, 32 с.
32. *Тимохов В. А.*, Исследования по теории существования экономического равновесия. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., МГУ, 1978, 17 с.
33. *Христович Н. Л.*, Об условиях устойчивости процессов регулирования цен. Экон. и мат. методы, 1979, *15*, № 2, 361—372 (РЖМат, 1979, 9В961)
34. *Arrow K. J.*, Stability independent of adjustment speed. In «Trade, stability and Macroeconomics, Essays in the Honour of L. A. Metzler», ed. by G. Horwich and P. Samuelson. New York—London, Acad. Press, 1974, 181—202
35. —, *Block H. D.*, *Hurwicz L.*, On the stability of competitive equilibrium II. Econometrica, 1959, *27*, № 1, 82—109 (РЖМат, 1962, 2В486)
36. —, *Hahn F. H.*, General competitive analysis. San Francisco, Holden—Day, 1972, XII, 452 pp. (РЖМат, 1974, 8В551К)
37. —, *Hurwicz L.*, On the stability of competitive equilibrium I. Econometrica, 1958, *26*, № 4, 522—552 (РЖМат, 1960, 4355)

38. —, —, Some remarks on the equilibria of economic systems. Econometrica, 1960, *28*, № 3, 640—646 (РЖМат, 1962, 2В478)
39. —, —, Competitive equilibrium under weak gross substitutability: non-linear price adjustment and adaptive expectation. International Economic Review, 1962, *3*, № 2, 233—255
40. *Aumann R. J., Peleg B.*, A note on Gale's example. J. Math. Econ., 1974, *1*, № 2, 209—211
41. *Balasko Y.*, The transfer problem and the theory of regular economics. International Economic Review, 1978, *19*, № 3, 687—694
42. *Bassett L., Maybee J., Quirk J.*, Qualitative economics and the scope of the correspondence principle. Econometrica, 1968, *36*, № 3-4, 544—563 (РЖМат, 1969, 7В351)
43. *Blad M. C.*, On the speed of adjustment in the classical tatonnement process: A limit result. J. Econ. Theory, 1978, *19*, № 1, 186—191 (РЖМат, 1979, 7В827)
44. *Champsaur P., Drèze J., Henry C.*, Stability theorems with economic applications. Econometrica, 1977, *45*, № 2, 273—294 (РЖМат, 1977, 10В530)
45. *Cheng Hsueh-Cheng*, Linear economics are «gross substitute» systems. J. Econ. Theory, 1979, *20*, № 1, 110—117 (РЖМат, 1979, 10В614)
46. *Chitre Vikas*, A note on the three Hicksian laws of comparative statics for the gross substitute case. J. Econ. Theory, 1974, *8*, № 3, 397—400
47. *Eichhorn W., Oettli W.*, A general formulation of the Lechatelier-Samuelson principle. Econometrica, 1972, *40*, № 4, 711—717 (РЖМат, 1973, 11В625)
48. *Fisher Franklin M.*, Gross substitutes and the utility function. J. Econ. Theory, 1972, *4*, № 1, 82—87
49. *Gale D.*, Exchange equilibrium and coalitions; An example. J. Math. Econ., 1974, *1*, № 1, 63—66
50. —, The linear exchange model. J. Math. Econ. 1976, *3*, № 2, 205—209 (РЖ Экономика промышленности, 1977, 1Д64; РЖМат, 1977, 5В505)
51. —, *Nicaidô M.*, The Jacobian matrix and global univalence of mappings. Math. Ann., 1965, *159*, № 2, 81—93 (РЖМат, 1965, 11Б6)
52. *Ginsburgh V., Waelbroeck J.*, A note of the simultaneous stability of tatonnement processes for computing equilibria. Intern. Econ. Rev., 1979, *20*, № 2, 367—380
53. *Gorman W. M.*, More scope for qualitative economics. Rev. Econ. Studies, 1964, *31*, № 1, 65—68 (РЖМат, 1964, 10В256)
54. *Guesnerie R., Laffont J.-J.*, Advantageous reallocations of initial resources. Econometrica, 1978, *46*, № 4, 835—841 (РЖМат, 1979, 1В960)
55. *Hahn F. H.*, Gross substitutes and the dynamic stability of general equilibrium. Econometrica, 1958, *26*, № 1, 169—170 (РЖМат, 1959, 2995)
56. *Hicks J. R.*, Value and capital. Oxford, Clarendon press, 1939, 331 pp.
57. *Howitt P.*, Gross substitability with multi-valued exess demand functions. Econometrica, 1980, *48*, № 6, 1567—1573
58. *Inada K.-I.*, The production coefficient matrix and the Stolper—Samuelson condition. Econometrica, 1971, *39*, № 2, 219—239
59. *Kuga K.*, Weak gross substitutability and the existence of competitive equilibrium. Econometrica, 1965, *33*, № 3, 593—599 (РЖМат, 1967, 2В328)
60. *Kusumoto Sho-Ichito*, Extensions of the Le Chatelier—Samuelson principle and their application to analytical economics—constraints and economic analysis. Econometrica, 1976, *44*, № 3, 509—535 (РЖМат, 1977, 1В623)
61. —, Global characterization of the weak Le Chatelier—Samuelson principles and its applications to economic behavior, preferences, and utility — «embending» theorems. Econometrica, 1977, *45*, № 8, 1925—1955 (РЖМат, 1978, 9В798)
62. *Lancaster K.*, The theory of qualitative linear systems. Econometrica, 1965, *33*, № 2, 395—408 (РЖМат, 1965, 12В200)
63. *McKenzie*, Matrices with dominant diagonals and economic theory. Math.

Methods Soc. Sci., 1959, Stanford, Calif., Univ. Press., 1960, 47—62 (РЖМат, 1963, 3В405; 8В364)
64. —, Stability of equilibrium and the value of positive excess demand. Econometrica, 1960, *28*, № 3, 606—617 (РЖМат, 1962, 2В468)
65. *Moré J. J.*, Classes of functions and feasibility conditions in nonlinear complementarity problems. Math. Program., 1974, *6*, № 3, 327—338 (РЖМат, 1975, 2В712)
66. *Morishima M.*, On the three Hicksian laws of comparative statics. Rev. Econ. Studies, 1960, *27*, № 3(74), 195—201
67. —, A generalization of the gross substitute system. Rev. Econ. Studies, 1970, *37*, № 2(110), 117—186
68. *Mosak J. L.*, General equilibrium theory in international trade. Bloomington, Ind., Principia press, 1944, 187 pp.
69. *Negishi T.*, A note on the stability of an economy where all goods are gross substitutes. Econometrica, 1958, *26*, № 3, 445—447 (РЖМат, 1959, 7271)
70. —, The stability of a competitive economy: A survey article. Econometrica, 1962, *30*, № 4, 635—669 (РЖМат, 1964, 10В261)
71. *Ohyama M.*, On the stability of generalized Metzlerian systems. Rev. Econ. Studies, 1972, *39*, № 2(118), 193—204 (РЖМат, 1972, 12В363)
72. *Okuguchi Koji*, Matrices with dominant diagonal blocks and economic theory. J. Math. Econ., 1978, *5*, № 1, 43—52 (РЖМат, 1979, 1В940)
73. *Quirk J. P.*, Comparative statics under Walras' law: the case of strong dependence. Rev. Econ. Studies, 1968, *35*, № 1(101), 11—21
74. *Rader T.*, General equilibrium theory with complementary factors. J. Econ. Theory, 1972, *4*, № 3, 372—380 (РЖМат, 1972, 11В460)
75. *Samuelson P. A.*, The stability of equilibrium: comparative statics and dynamcs. Econometrica, 1941, *9*, № 2, 97—120
76. —, Foundations of economic analysis. Cambridge, Harvard Univ. Press, 1955, 447 p.
77. —, An extension of the Lechatelier principle. Econometrica, 1960, *28*, № 2, 368—369 (РЖМат, 1962, 6В351)
78. *Sandberg I. W.*, A note on market equilibrium with fixed supply. J. Econ. Theory, 1975, *11*, № 3, 456—461 (РЖМат, 1976, 7В716)
79. —, A criterion for the global stability of a price adjustment process. J. Econ. Theory, 1978, *19*, № 1, 192—199 (РЖМат, 1979, 7В826)
80. —, Correction to «A note on market equilibrium with fixed supply». J. Econ. Theory, 1979, *20*, № 1, 124 (РЖМат, 1979, 11В721)
81. *Sato Ryuzo*, The stability of the competitive system which contains gross complementary goods. Rev. Econ. Studies, 1972, *39*, № 4(120), 495—500 (РЖМат, 1973, 5В693)
82. —, On the stability properties of dynamic economic systems. Intern. Econ. Rev., 1973, *14*, № 3, 753—764
83. *Smale S.*, A convergent process of price adjustment and Global Newton methods. J. Math. Econ., 1976, *3*, № 2, 107—120 (РЖМат, 1977, 2В668; РЖ Экономика промышленности, 1977, 1В62)
84. *Tamir A.*, A further note on market equilibrium with fixed supply. J. Econ. Theory, 1977, *15*, № 2, 392—393 (РЖМат, 1978, 2В582)
85. *Uzawa H.*, Walras tatonnement in the theory of exchange. Rev. Econ. Studies, 1960, *27*, № 3(74), 182—194
86. —, The stability of dynamic processes. Econometrica, 1961, *29*, № 4, 617—631 (РЖМат, 1964, 1В392)
87. *Wald A.*, On some systems of equations of mathematical economics. Econometrica, 1951, *19*, № 4, 368—403
88. *Watson D.*, Comment on the paper: «A general formulation of the Lechatelier—Samuelson principle» by W. Eichhorn and W. Oettli. Econometrica, 1974, *42*, № 6, 1133 (РЖМат, 1975, 6В741)
89. *Yun Kwan Koo*, On the existence of a unique and stable market equilibrium. J. Econ. Theory, 1979, *20*, № 1, 118—123 (РЖМат, 1980, 1В1023)