ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1988
Том XXIV, вып. 6

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОЦЕССОВ СОЗДАНИЯ И ЗАИМСТВОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ

Полтерович В. М., Хенкин Г. М.

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени моделирование технического прогресса опиралось главным образом на представления об экзогенности технологических изменений. Это позволяло изучать некоторые последствия возникновения новых технологий, не затрагивая механизма их распространения. Однако важность построения эндогенной теории экономической эволюции была осознана уже много лет назад. Еще в 1939 г. Дж. Шумпетер (см., например, [1]), разработал концепцию распространения инноваций, в основе которой лежит расчленение механизма технологических сдвигов на две компоненты: создание новых технологий (собственно инновационный процесс) и их заимствование (процесс имитации). Относительно первой, наиболее деликатной составляющей, известно мало, хотя накоплен значительный статистический материал, указывающий на определенные закономерности возникновения крупных технологических изменений. Процесс имитации изучен более детально и на более строгом уровне. Имитация рассматривается как основной элемент механизма диффузии, проникновения нововведений от фирм-новаторов ко всем остальным фирмам.

Естественно считать, что скорость диффузии пропорциональна доле фирм, еще не освоивших нововведение. Весьма плодотворной оказалась простейшая гипотеза о том, что соответствующий коэффициент пропорциональности линейно растет с увеличением доли фирм, перешедших на новую технологию. Эта гипотеза приводит к заключению, что доля фирм, внедривших инновацию, должна изменяться во времени по логистической кривой. Эмпирические исследования (см., например, [2—7]) показали, что для многих нововведений эти кривые имеют S-образную форму и действительно напоминают логистическую; в ряде случаев она хорошо аппроксимировала статистические данные.

Модель, основанная на совсем других соображениях, но также приводящая к S-образной кривой диффузии, предложена в [8].

Еще одно наблюдение, имеющее для нас фундаментальное значение, состоит в том, что в экономике, даже в монопродуктовых отраслях, в каждый момент времени сосуществуют разноэффективные технологии. Этот факт лег в основу оригинальной теории производственных функций, ведущей начало от Хаутеккера и Йохансена [9] и получившей дальнейшее развитие в [10] (см. также [11, 12]). Оказывается, что кривые распределения мощностей данной отрасли по уровням эффективности для разных моментов времени похожи друг на друга. Во многих случаях эти кривые унимодальны. Более того, наблюдается определенное сходство между кривыми соответствующими разным отраслям*. Этот факт

* Разумеется, в эмпирическом исследовании понятия «мощность» и «уровень эффективности» должны быть точно определены. Например, в [10] речь идет о рас-

противоречит стандартной микроэкономической теории, согласно которой вложения должны осуществляться лишь в наиболее эффективные (прибыльные) технологии, а потому доля низкорентабельных производственных мощностей должна быть пренебрежимо малой. С классической точки зрения, наличие разноэффективных производств — свидетельство неравновесности экономики.

Цель настоящей статьи — показать, что оба отмеченных факта — «логистический» характер диффузионных кривых и устойчивая форма кривых распределения мощностей по уровням эффективности являются следствием «динамического равновесия» между инновационным и имитационным процессами. Впервые эта задача рассматривалась в работе К. Иваи [13] (см. также [14]), оказавшей большое влияние на формирование излагаемых ниже идей. Однако содержащийся в [13] способ решения проблемы не кажется нам вполне удовлетворительным. К. Иваи сопоставляет каждому уровню эффективности величину удельных затрат и постулирует, что минимальное значение удельных затрат убывает во времени по экспоненциальному закону. В тот момент, когда некоторое минимальное значение достигается, оно характеризует лишь одну единственную фирму, но затем начинается процесс имитации. Предполагается также, что все фирмы имеют равные возможности перейти на любой более высокий технический уровень. Благодаря этому и ряду дополнительных предположений скорость изменения функции распределения в любой точке определяется лишь ее значениями в той же точке, отсюда находится закон ее изменения во времени. В полученных диффузионных кривых текущее время и момент начала диффузии можно считать функциями соответствующих минимальных удельных затрат. Таким образом, К. Иваи получает распределение фирм в зависимости от соотношения удельных затрат данного уровня к минимальным текущим удельным затратам.

На наш взгляд, гипотеза о равновероятности «перескока» фирмы на любой более высокий уровень является слишком смелой. Правдоподобнее кажется другое «крайнее» предположение о возможности перехода лишь на следующий более высокий уровень *. Еще большее неудовлетворение вызывает постулат об экзогенном характере изменения удельных затрат, который в большой степени априорно навязывает темп технологической эволюции. Хотелось бы объяснить наблюдаемые факты исходя из представлений о взаимодействии инновационных и имитационных процессов.

Формулируемая ниже альтернативная модель в значительной мере свободна от указанных недостатков.

В разд. 2 предлагается дифференциально-разностное уравнение, задающее в непрерывном времени эволюцию кривой распределения предприятий по дискретным уровням эффективности. Получено явное решение этого уравнения при произвольных финитных начальных условиях (разд. 3) и показано, что ему удовлетворяет однопараметрическое семейство волн — функций, зависящих от линейной комбинации обеих аргументов; они представляют собой всевозможные сдвиги логистического распределения вероятностей, движущиеся с постоянной скоростью.

В разд. 4 сформулирована основная теорема, утверждающая экспоненциальную сходимость произвольного решения к одной из волн. Эта теорема объясняет S-образный характер наблюдаемых кривых диффузии и устойчивость формы распределения фирм по уровням. Разд. 5 посвящен краткому рассмотрению возможных обобщений, модификаций и приложений предлагаемого эволюционного уравнения. В последнем шестом разделе приведены доказательства содержащихся в статье утверждений.

пределении добавленной стоимости (условно чистой продукции) по величине отношения заработной платы к добавленной стоимости. Соответствующие гистограммы были построены более чем для 300 отраслей, около 75–80% из них оказались унимодальными [10, с. 186].

* В [13] содержится замечание, свидетельствующее о готовности ее автора согласиться с таким утверждением.

2. УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ

Рассмотрим производственную систему (например, отрасль), включающую несколько предприятий, упорядоченных по уровням эффективности. Понятие уровня эффективности может быть определено разными способами. Так, в [14] мерой эффективности выбраны затраты на единицу добавленной стоимости (условно чистой продукции), в [10] — удельная заработная плата, в [15, 16] речь идет о степени автоматизации и механизации производства, определяемой на основе специальной классификации. Для дальнейшего безразлично, какой конкретный показатель имеется в виду, важно лишь, что каждое предприятие стремится перейти на уровень с более высоким номером.

Обозначим через $F_n(t)$ долю предприятий, находящихся в момент t на уровнях с номером, не большим, чем n. Здесь $t\in[0, \infty)$, а n может принимать любые целые неотрицательные значения, $n=0, 1, \ldots$. Символ F_n обозначает соответствующую функцию времени. Последовательность F_n как функция времени описывает эволюцию кривой распределения предприятий по уровням эффективности. Мы предполагаем, что эта эволюция подчиняется формулируемому ниже правилу.

Основная гипотеза. Предприятие может переходить только на следующий более высокий уровень. Число предприятий, переходящих за единицу времени с уровня n на уровень $n+1$, пропорционально количеству предприятий, находящихся в данный момент времени на уровне n, причем коэффициент пропорциональности является линейной функцией доли предприятий, принадлежащих всем уровням с номерами, большими, чем n.

Поскольку общее число предприятий предполагается неизменным, легко понять, что в силу основной гипотезы при любом n функция F_n не возрастает. Скорость ее убывания определяется скоростью перехода на $(n+1)$-й уровень предприятий n-го уровня (доля которых равна F_n-F_{n-1}). Таким образом,

$$\frac{dF_n}{dt}=-(\alpha+\beta(1-F_n(t)))(F_n(t)-F_{n-1}(t)), \tag{1}$$

где α и β — положительные константы. Правую часть (1) можно представить как сумму двух слагаемых: $\alpha(F_{n-1}-F_n)$ и $\beta(1-F_n)(F_{n-1}-F_n)$. Первое из них характеризует собственно инновационный процесс, спонтанную изобретательскую и рационализаторскую деятельность. Его скорость пропорциональна доле (или, что то же самое, числу) предприятий n-го уровня с коэффициентом пропорциональности α. Второе слагаемое вносит весомый вклад лишь в том случае, если значительная часть предприятий находится на более высоких, чем n, уровнях эффективности. Оно определяет скорость имитации — процесса заимствования технологий и опыта. В результате имитации способы производства, освоенные более передовыми предприятиями, «диффундируют», быстрее осваиваются остальными. Под действием обоих процессов кривая распределения деформируется, смещаясь в направлении возрастания эффективности. Эволюция этой кривой, описываемая уравнением (1), является основным предметом изучения в данной статье.

Уравнение (1) допускает простую вероятностную интерпретацию. Предположим, что вероятность перехода предприятия с уровня n на уровень $n+1$ за единицу времени равна α в инновационном процессе и равна $\hat{\beta}(1-F_n)$ — в процессе имитации, причем процессы независимы. Тогда вероятность перехода равна $\alpha+\beta(1-F_n)$, где $\beta=\hat{\beta}(1-\alpha)$. Таким образом, правая часть (1) интерпретируется как средняя скорость изменения доли предприятий на уровнях с номерами, не превосходящими n.

3. РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть заданы начальные и естественное граничное условия

$$0\leqslant F_n(0)\leqslant 1,\ 1\leqslant n<\infty;\ \lim F_n(0)=1;\ F_0(t)=0 \text{ для всех } t\geqslant 0 \tag{2}$$

Тогда решение уравнения (1) может быть получено в явном виде. Введем новые переменные z_n, $0\leqslant n<\infty$, так, что

$$F_n=\frac{1}{\beta}\left(\mu-\frac{z_{n-1}}{z_n}\right),\qquad 1\leqslant n<\infty,\ z_0=e^{\mu t},\ \mu=\alpha+\beta. \tag{3}$$

В результате замены (3) исходное уравнение (1) перепишется следующим образом *

$$\frac{dz_n}{dt}=z_{n-1},\qquad 1\leqslant n<\infty,\qquad z_0=e^{\mu t},$$

или

$$\frac{d^n z_n}{dt^n}=e^{\mu t}.$$

Поэтому

$$z_n=\mu^{-n}e^{\mu t}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_{n-k}t^k}{k!},$$

где c_n — произвольные постоянные. Очевидно, $c_n=z_n(0)-\mu^{-n}$, следовательно,

$$z_n=\mu^{-n}h_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z_{n-k}(0)\,t^k}{k!},\qquad 1\leqslant n<\infty, \tag{4}$$

где

$$h_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}. \tag{5}$$

Кроме того, из (3) вытекает, что

$$z_n(0)=\prod_{k=1}^{n}w_k(0), \tag{6}$$

где

$$w_k=(\mu-\beta F_k(0))^{-1}.$$

Удобно ввести еще одно обозначение

$$\xi_n=\frac{z_{n-1}-\alpha z_n}{\mu z_n-z_{n-1}}. \tag{7}$$

Из (3) получим

$$F_n=(1+\xi_n)^{-1}, \tag{8}$$

а подстановка (4) в (7) приводит к соотношению

$$\xi_n=\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n\frac{h_n+q_n}{r_n} \tag{9}$$

---

* Действительно, найдем из (3) производную $\frac{dF_n}{dt}$ и приравняем результат правой части (1), заменив $\mu-\beta F_n$ на z_{n-1}/z_n. После очевидных преобразований придем к соотношению

$$\frac{1}{z_n}\frac{dz_n}{dt}=\frac{1}{z_{n-1}}\frac{dz_{n-1}}{dt}-\beta(F_n-F_{n-1}).$$

Учитывая, что $\frac{1}{z_0}\frac{dz_0}{dt}=\mu$, $F_0=0$, и снова используя (3), получим нужное уравнение.

где

$$q_n=\mu^n\sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k}(0)\,(1-F_{n-k}(0))\,\frac{t^k}{k!}, \tag{10}$$

$$r_n=\alpha^n\sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k}(0)F_{n-k}(0)\,\frac{t^k}{k!}. \tag{11}$$

Формулы (5)—(11) дают решение рассматриваемой задачи Коши (1), (2).

Особый интерес представляют начальные условия, содержащие лишь конечное число N значений, отличных от единицы

$$0<F_k(0)<1,\quad 1\leqslant k\leqslant N;\qquad F_k(0)=1,\quad k\geqslant N+1. \tag{12}$$

В этом случае

$$\mu^{-1}<w_n(0)<\alpha^{-1},\quad 1\leqslant n\leqslant N;\qquad w_n(0)=\alpha^{-1},\quad n>N, \tag{13}$$

$$z_n(0)=\alpha^{-n}P,\qquad n>N;\qquad P=\alpha^N\prod_{k=1}^{N} w_k(0), \tag{14}$$

так что формулы (10), (11) могут быть уточнены.

Рассмотрим теперь уравнение (1) на всей временной оси. Непосредственно проверяется, что оно имеет следующее семейство решений

$$F_n^*(t,A)=\left(1+A\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n e^{\beta t}\right)^{-1}, \tag{15}$$

где A — произвольный параметр. Действительно, положим

$$v_n=\beta t-n\ln\frac{\mu}{\alpha}+\ln A.$$

Тогда $F_n^*=(1+e^{v_n})^{-1}$ и нетрудно установить, что

$$\frac{dF_n^*}{dt}=-\beta(1-F_n^*)F_n^*,\qquad F_n^*-F_{n-1}^*=\frac{\beta(1-F_n^*)F_n^*}{\mu-\beta F_n^*},$$

откуда и следует требуемое*. Функция F_n^* стремится к нулю при $n\to-\infty$ и к единице — при $n\to\infty$ для любого фиксированного t. Она зависит лишь от разности $t-\gamma_0 n$,

$$\gamma_0=\beta^{-1}\ln\frac{\mu}{\alpha}, \tag{16}$$

и задает волну, движущуюся равномерно вдоль оси n со скоростью $1/\gamma_0$; за время γ_0 она сдвигается на один уровень вправо. При фиксированном t она определяет так называемое логистическое распределение вероятностей, а при фиксированном n задает убывающую логистическую кривую, описывающую изменение во времени доли предприятий, находящихся на уровне эффективности n. Изменение параметра A приводит к сдвигу распределения. При $t=t(n)=\gamma_0 n-\beta^{-1}\ln A$ максимальная доля предприятий сосредоточена на уровне n.

Семейство (15) играет важнейшую роль при изучении асимптотического поведения решений.

---

* Наличие семейства волновых решений (15), равно как и подстановки (3), приводящей уравнение к линейному, явилось для нас неожиданностью.

Прежде чем переходить к основной задаче данного раздела — исследованию поведения решений при $t\to\infty$ — отметим два простых, но важных факта *.

Предложение 1. *Если $F_n(0)\geqslant F_{n-1}(0)$ для всех n, то $F_n(t)\geqslant F_{n-1}(t)$ для всех n, t.*

Таким образом, уравнение (1) действительно задает эволюцию кривой распределения.

Положим

$$B(t)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}(1-F_k(t))\right). \tag{17}$$

Предложение 2. *Пусть F_n, $1\leqslant n<\infty$ — решение задачи (1), (2), причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-F_k(0))<\infty.$$

Тогда для любого $t\geqslant 0$ справедливо равенство

$$e^{-\beta t}B(t)=B(0)<\infty.$$

В частности, предложение 2 справедливо, если начальные условия удовлетворяют (12). Для этого класса решений выражение $e^{-\beta t}B(t)$ является первым интегралом.

Две следующие теоремы являются основными результатами настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть F_n, $1\leqslant n<\infty$ — решение задачи (1), (2), причем $B(0)<\infty$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется число $T(\varepsilon)$ такое, что при $A=B(0)$ справедливы неравенства*

$$|F_n(t)-F_n^*(t, A)|\leqslant\varepsilon$$

для всех $t\geqslant T(\varepsilon)$ и всех $n\geqslant 0$.

Здесь функция F_n^* определена формулой (15).

Теорема 2. *Пусть F_n, $1\leqslant n<\infty$ — решение задачи (1), (2), (12). При $A=B(0)$ справедлива следующая оценка* **.

$$|F_n(t)-F_n^*(t, A)|\leqslant\lambda e^{-\gamma t},\qquad 0\leqslant n<\infty,\qquad t\geqslant T_0,$$

где λ, T_0 — постоянные, зависящие от α, β, $B(0)$, N, $\gamma=\gamma(\alpha,\beta)=\min\{\gamma_1,\gamma_2\}$, а константы γ_1, γ_2 являются единственными решениями уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\beta+\mu}{\beta+\gamma_1}\ln\frac{\mu}{\alpha}+\ln(\beta+\gamma_1)=1+2\ln\mu-\ln\alpha+\ln\ln\frac{\mu}{\alpha},\\ \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma_2}\ln\frac{\mu}{\alpha}+\ln(\beta-\gamma_2)=1-\ln\mu+2\ln\alpha+\ln\ln\frac{\mu}{\alpha}\end{gathered} \tag{18}$$

соответственно в интервалах

$$0<\gamma_1<\mu\ln\frac{\mu}{\alpha}-\beta\quad и\quad 0<\gamma_2<\beta-\alpha\ln\frac{\mu}{\alpha}. \tag{19}$$

Замечание. При $\beta\ll\alpha$ и при $\beta\gg\alpha$ γ_1 больше γ_2. Однако при $\beta\approx\alpha$ имеем $\gamma_1<\gamma_2$.

Отметим, что из (14), (6) и (17) следует равенство $B(0)=1/P$. Первая теорема будет доказана как следствие второй в последнем разделе статьи.

---

* Доказательства всех формулируемых ниже предложений и теорем содержатся в последнем разделе статьи.

** Было бы интересно показать, что эта оценка неулучшаема по порядку экспоненты.

Если начальное распределение имеет вид $F_n(0)=F_n^*(0, A)$, то как легко проверить

$$e^{-\beta t}B^*(t)=A+e^{-\beta t}.$$

Выражение справа зависит от t, поскольку в данном случае $F_0(0)>0$, но все же стремится к A при $t\to\infty$. Это несколько проясняет появление постоянной A в формулировке теорем 1, 2.

Остановимся на содержании сформулированных утверждений. Пусть в начальный момент предприятия произвольным образом распределены по конечному числу уровней эффективности. В результате инновационного процесса кривая распределения сдвигается вправо. Скорость перехода на более эффективные технологии увеличивается за счет процесса имитации, одновременно происходит деформация кривой распределения. Согласно теореме 1, с течением времени в результате взаимодействия обоих процессов «скорость роста эффективности» оказывается близкой ко вполне определенному значению $\beta/\ln\frac{\mu}{\alpha}$ (см. (16)), зависящему от инновационной и имитационной констант, а распределение становится все более похожим на логистическое. При этом доля предприятий, находящихся на произвольном фиксированном уровне, убывает во времени по логистической кривой. Вторая теорема уточняет первую, утверждая, что сходимость исходного распределения к логистическому имеет экспоненциальный характер, т. е. является достаточно быстрой. Таким образом, оба отмеченных во введении факта: S-образный характер кривых диффузии и устойчивость кривых распределения по уровням эффективности находят объяснение в рамках предлагаемой модели *.

5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И МОДИФИКАЦИИ

Отметим некоторые естественные направления развития изложенной выше теории. Можно показать, что аналог теоремы 1 справедлив для уравнения гораздо более общего, чем уравнение (1)

$$\frac{dF_n}{dt}=\varphi(F_n)(F_{n-1}-F_n), \tag{20}$$

где φ — непрерывная положительная убывающая функция на отрезке $[0, 1]$. Доказательству этого факта будет посвящена отдельная статья. Даже если φ зависит от n то, по-видимому, решения (20), соответствующие разным начальным условиям, но с одинаковым первым интегралом, сходятся друг к другу.

При выводе основного уравнения мы исходили из предположения о том, что в результате имитационной и инновационной деятельности предприятия могут переходить лишь на следующий уровень. В определенном смысле «антиподом» этому допущению является постулат, согласно которому при имитации равновероятен переход с любого уровня на любой уровень с большим номером. Если механизм инноваций остается прежним, то приходим к уравнению

$$\frac{dF_n}{dt}=-\alpha(F_n-F_{n-1})-\beta F_n(1-F_n), \tag{21}$$

решения которого, по-видимому, также сходятся к некоторой волне.

Вследствие амортизации фондов часть предприятий может переходить на более низкие уровни эффективности. Учет этого обстоятельства приводит к появлению в правой части уравнения членов, зависящих от F_{n+1}.

* В эмпирических исследованиях, как правило, речь идет о распределении мощностей, а не числа предприятий. Приведенное рассуждение неявно предполагает, что средняя относительная мощность предприятия не зависит от уровня эффективности (в [13] утверждается, что форма кривой распределения числа предприятий также устойчива во времени).

Например, простейшая подобная модификация уравнения (20) имеет вид

$$\frac{dF_n}{dt}=\varphi(F_n)(F_{n-1}-F_n)+\mu(F_{n+1}-F_n). \tag{22}$$

Изученная выше модель (1), так же как ее модификации, не описывает процесс экономического роста. Мы однако надеемся, что во многих интересных случаях изучение моделей роста, учитывающих взаимодействие инновационных и имитационных процессов, после перехода к относительным переменным сведется к исследованию указанных выше уравнений или их возмущений. Некоторые примеры моделей такого рода разработаны авторами. Отметим, что при этом уравнение (1) получает несколько иную интерпретацию: оно описывает распределение мощностей (а не предприятий) по уровням эффективности.

Теоремы 1, 2 примыкают к обширному классу результатов, полученных при изучении динамических процессов в физике, биологии, химической кинетике и в ряде других областей [17, 18]. Уравнение (1), являющееся, по-видимому, первым примером нелинейного экономического уравнения с устойчивой одиночной волной, по характеру асимптотики решений напоминает уравнение Бюргерса (см. теорему Хопфа в [17]), однако в отличие от последнего является дифференциально-разностным. Благодаря этой особенности оно не опирается на какие-либо гипотезы о переходах между «бесконечно близкими» уровнями. Но при этом скорость распространения взаимодействий оказывается бесконечной: легко видеть, что в любой ненулевой момент времени в модели (1) найдутся предприятия, находящиеся на сколь угодно высоком уровне эффективности. Правда, их доля быстро убывает, так что приближенно распределение можно считать сосредоточенным на интервале фиксированной длины. Все же исключение бесконечной скорости распространения взаимодействий следует считать еще одним целесообразным направлением совершенствования модели.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЙ И ТЕОРЕМ

Доказательство предложения 1. Пусть функции $F_n(t)$ удовлетворяют уравнению (1) при условиях (2) и пусть $F_n(0)\geqslant F_{n-1}(0)$ для всех n. Положим $f_n=F_n-F_{n-1}$. Тогда из (1) получаем

$$\frac{df_n}{dt}=-(\mu-\beta F_n)f_n+(\mu-\beta F_{n-1})f_{n-1}. \tag{23}$$

Доказательство проведем по индукции. Очевидно, $f_1(t)\geqslant 0$ при всех t и без ограничения общности можно считать, что $f_1(0)>0$. Тогда $f_1(t)>0$ при всех t. В самом деле, если t_0 — первый момент такой, что $f_1(t_0)=0$, то при $t\in[0,t_0)$ имеем $\dfrac{df_1}{dt}=-\mu f_1$.

Следовательно, $0=f_1(t_0)\geqslant f_1(0)e^{-\mu t_0}>0$, и мы пришли к противоречию. Предположим теперь, что $f_k(t)>0$ при $t>0$ для любого $k\leqslant n-1$, но $f_n(t_0)=0$, $t_0>0$. При этом можно считать, что $f_n(t)\geqslant 0$, $t\leqslant t_0$. С другой стороны, при t, близких к t_0, в силу (23) и поскольку $f_{n-1}>0$, имеем $df_n/dt>0$, так что рассматриваемая ситуация невозможна. Следовательно, $f_n(t)>0$ при всех $t>0$ что и требовалось доказать.

Доказательство предложения 2. Уравнение (1) эквивалентно следующему

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{\mu-\beta F_n}{\alpha}\right)=F_n-F_{n-1}. \tag{24}$$

После суммирования по n и простых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\ln e^{-\beta t}\prod_{k=1}^{n}V_k=\beta(F_n-1), \tag{25}$$

где $V_k = 1 + \frac{\beta}{\alpha}(1-F_k)$. Интегрируя, будем иметь

$$\ln e^{-\beta t} \prod_{k=1}^{n} V_k(t) = \ln \prod_{k=1}^{n} V_k(0) + \int_0^t \beta(F_n(\tau)-1)\,d\tau. \qquad (26)$$

Фиксируем t. По условию, правая часть (26) ограничена, следовательно, произведение $\prod_{k=1}^{\infty} V_k(t)$ сходится. Поэтому $F_n(t) \to 1$ при $n \to \infty$. Поскольку это верно для любого $\tau \in [0, t]$, то интеграл в правой части (26) стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, из (26) следует доказываемое предложение.

Доказательство теоремы 1 на основе теоремы 2. Положим

$$B_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1-F_k(t))\right), \quad B_0(t) = 1. \qquad (27)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия $A = B(0) = \lim\limits_{n\to\infty} B_n(0)$ вытекает существование такого $N = N(\varepsilon)$, что

$$0 \leqslant A - B_N(0) < A\varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_{k \geqslant N+1} (1-F_k(0)) < \varepsilon. \qquad (28)$$

Выберем число G, $0 \leqslant G \leqslant 1$ так, чтобы имело место равенство

$$B_N(0)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1-G)\right) = A. \qquad (29)$$

Из (28) и (29) вытекает неравенство

$$1 - G < \frac{\alpha}{\beta}\varepsilon. \qquad (30)$$

Пусть $\tilde{F}_n(t)$, $n=0, 1, \dots$, — решение уравнения (1) с граничными и начальными условиями

$$\begin{gathered} \tilde{F}_0(t) = 0, \quad \tilde{F}_k(0) = F_k(0), \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \\ \tilde{F}_{N+1}(0) = G, \quad \tilde{F}_k(0) = 1, \quad k \geqslant N+2. \end{gathered} \qquad (31)$$

Условия (29), (31) обеспечивают равенства

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{B}_n(0) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1-\tilde{F}_k(0))\right) = \tilde{B}_{N+1}(0) = A. \qquad (32)$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает оценка

$$|\tilde{F}_n(t) - F_n^*(t, A)| \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant n < \infty, \qquad (33)$$

для всех $t \geqslant T(\varepsilon)$.

Докажем, что имеет место также следующая оценка

$$|\tilde{F}_n(t) - F_n(t)| = O(\varepsilon). \qquad (34)$$

Введем переменные z_n и $\tilde{z}_n$, $0 \leqslant n < \infty$, так, чтобы

$$F_n = \frac{1}{\beta}\left(\mu - \frac{z_{n-1}}{z_n}\right), \quad \tilde{F}_n = \frac{1}{\beta}\left(\mu - \frac{\tilde{z}_{n-1}}{\tilde{z}_n}\right), \qquad (35)$$

$$z_0 = \tilde{z}_0 = e^{\mu t}.$$

Подставляя (35) в (27) получим

$$B_n(t)=\alpha^{-n}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_{k-1}}{z_k}=\alpha^{-n}\frac{z_0}{z_n}=\alpha^{-n}\frac{e^{\mu t}}{z_n}.$$

Отсюда

$$z_n=\alpha^{-n}e^{\mu t}/B_n(t). \tag{36}$$

Аналогично

$$\tilde{z}_n=\alpha^{-n}e^{\mu t}/\tilde{B}_n(t).$$

Положим теперь

$$\Delta_n(t)=z_n(t)/\tilde{z}_n(t).$$

Из (32) и (36) и предложения 2 вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{B}_n(t)}{B_n(t)}=\frac{\tilde{B}_{N+1}(0)}{B(0)}=1. \tag{37}$$

Воспользуемся теперь уравнениями (см. разд. 3)

$$\frac{dz_n}{dt}=z_{n-1}\quad \text{и}\quad \frac{d\tilde{z}_n}{dt}=\tilde{z}_{n-1}. \tag{38}$$

Из этих уравнений вытекает следующее уравнение для Δ_n

$$\Delta_n^{-1}\frac{d\Delta_n(t)}{dt}=\frac{\tilde{z}_{n-1}}{\tilde{z}_n}\left(\frac{\Delta_{n-1}(t)}{\Delta_n(t)}-1\right)=(\mu-\beta\tilde{F}_n)\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}-1\right). \tag{39}$$

Пользуясь (39), покажем, что справедлива оценка

$$\sup_{n\geqslant 0,\, t\geqslant 0}\Delta_n(t)\leqslant\sup_n\Delta_n(0). \tag{40}$$

Фиксируем $T>0$. В силу (37) $\sup\limits_{n\geqslant 0,\ t\leqslant T}\Delta_n(t)$ либо равен единице, и тогда (40) справедливо, либо больше, и достигается для некоторых пар (n, t), $n\geqslant 0$, $t\leqslant T$. Фиксируем среди них пару (n^*, t^*) с наименьшим n. Очевидно, $n^*>0$, так как $\Delta_0(t)=1$. Кроме того, в силу выбора n^* имеем

$$\Delta_{n^*-1}(t^*)<\Delta_{n^*}(t^*). \tag{41}$$

Оценка (40) будет установлена, если мы покажем, что $t^*=0$. Допустим противное. Пусть $T\geqslant t^*>0$. Из (39) и (41) следует, что $d\Delta_{n^*}(t^*)/dt<$ <0. Однако это неравенство и условие $t^*\neq 0$ находятся в противоречии с тем, что t^* — точка максимума функции $\Delta_{n^*}(t)$ на отрезке $[0, T]$. Следовательно, $t^*=0$. Оценка (40) доказана.

Аналогично доказывается оценка

$$\inf_{n\geqslant 0,\ t\geqslant 0}\Delta_n(t)\geqslant\inf_{n\geqslant 0}\Delta_n(0). \tag{42}$$

Из (36) следует, что

$$\Delta_n(0)=\tilde{B}_n(0)/B_n(0).$$

Согласно (31), $\Delta_n(0)=1$ при $n\leqslant N$, а при $n>N$

$$\tilde{B}_n(0)=A;\quad A\geqslant B_n(0)\geqslant B_N(0)>(1-\varepsilon)A.$$

Здесь первое соотношение вытекает из (29) и (31), а остальные — из определения B_n и (28). Таким образом, при любом n

$$1\leqslant\Delta_n(0)\leqslant 1/1-\varepsilon. \tag{43}$$

Отсюда, согласно (40) и (42), следуют аналогичные неравенства для $\Delta_n(t)$ при любых n, t, а значит, и соотношение (34), поскольку в силу (35)

$$\tilde{F}_n-F_n=\frac{1}{\beta}(\mu-\beta\tilde{F}_n)\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}-1\right).$$

Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 1 потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим соотношения

$$\mu\psi_1^{-1}\ln\frac{\mu}{\alpha}-\beta=\mu\psi_1^{-1}(\psi_1-1-\ln\psi_1),\qquad 1<\psi_1<\frac{\mu}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha},\tag{44}$$

$$\beta-\alpha\psi_2^{-1}\ln\frac{\mu}{\alpha}=\alpha\psi_2^{-1}(\psi_2-1-\ln\psi_2),\qquad \frac{\alpha}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha}<\psi_2<1.\tag{45}$$

Лемма 1. *Найдутся (и притом, единственные) значения ψ_1, ψ_2, удовлетворяющие (44) и (45).*

Доказательство. Очевидно $\ln\frac{\mu}{\alpha}=\int\limits_\alpha^\mu\frac{dx}{x}>\frac{\beta}{\mu}$, так что неравенства (44) определяют непустое множество чисел. Уравнение (44) можно переписать так: $\ln\psi_1=\left(1+\frac{\beta}{\mu}\right)\psi_1-1-\ln\frac{\mu}{\alpha}$.

При $\psi_1=1$ левая часть больше правой, а при $\psi_1=\frac{\mu}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha}$ — наоборот, поскольку

$$\ln\left(\frac{\mu}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha}\right)=\int\limits_1^{\frac{\mu}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha}}\frac{dx}{x}<\frac{\mu}{\beta}\ln\frac{\mu}{\alpha}-1.$$

Отсюда следует разрешимость (44). Разрешимость (45) доказывается аналогично.

Введем новые переменные

$$\gamma_1=\mu\psi_1^{-1}\ln\frac{\mu}{\alpha}-\beta,\qquad \gamma_2=\beta-\alpha\psi_2^{-1}\ln\frac{\mu}{\alpha}.\tag{46}$$

При этом соотношения (44), (45) переходят в (18), (19). Таким образом, существование (и единственность) решений (18), (19) доказано.

Чтобы не вводить новых обозначений, будем в дальнейшем под ψ_1, ψ_2, γ_1, γ_2 понимать числа, удовлетворяющие (44)–(46).

Положим $\tau=t/n$.

Лемма 2. *Если $\tau\geqslant\psi_1\mu^{-1}$, то для некоторого $\lambda_1=\lambda_1(\alpha,\beta)$*

$$h_n(t)=\sum_{k=n}^{\infty}(k!)^{-1}(\mu t)^k\geqslant e^{\mu t}(1-\lambda_1 t^{-1/2}e^{-\gamma_1 t}).\tag{47}$$

Доказательство. Имеем

$$g_n(t)=e^{\mu t}-h_n(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\mu t)^k}{k!}\leqslant\frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(1+\frac{n-1}{\mu t}+\left(\frac{n-1}{\mu t}\right)^2+\ldots\right).$$

Суммируя и используя неравенство Стирлинга, получим

$$g_n(t)\leqslant\frac{(\mu t)^n ne^n}{n^n\sqrt{2\pi n}(\mu t-n)}=\frac{\sqrt{\tau}\,e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi t}\,(\mu\tau-1)}e^{\frac{t}{\tau}(1-\mu\tau+\ln\mu\tau)}.$$

Легко проверить, что в правой части стоит убывающая функция параметра τ (поскольку $\mu\tau>1$). Подставляя минимальное значение $\tau=\psi_1\mu^{-1}$ и учитывая (46), (44), получаем (47) при

$$\lambda_1=\psi_1^{1/2}(2\pi\mu)^{-1/2}(\psi_1-1)^{-1}.$$

Лемма 3. *Если $\tau\leqslant\psi_2\alpha^{-1}$, $t\geqslant T_0=\dfrac{\psi_2 N}{\alpha(1-\sqrt{\psi_2})}$ то $n>N$ и для некоторого $\lambda_2=\lambda_2(\alpha,\beta,N)$*

$$d_n(t)=\sum_{k=0}^{n-N-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\geqslant e^{\alpha t}(1-\lambda_2 t^{-1/2}e^{-\gamma_2 t}).\tag{48}$$

Доказательство. В условиях леммы, как легко проверить, $\alpha t \leqslant (n-N)\sqrt{\psi_2}$, $n > N(1-\sqrt{\psi_2})^{-1}$. Поэтому каждый член ряда

$$u_n = e^{\alpha t} - d_n(t) = \sum_{k=n-N}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

не превосходит $\psi_2^{\frac{k-n}{2}} (\alpha t)^{n-N}/(n-N)!$ Суммируя, используя формулу Стирлинга и неравенство $(n/n-N)^{n-N} \leqslant e^N$, получим

$$u_n \leqslant \frac{e^n (\alpha\tau)^{n-N}}{(1-\sqrt{\psi_2})\sqrt{2\pi\alpha t}} = \frac{e^{\alpha t}}{(1-\sqrt{\psi_2})\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{\frac{t}{\tau}(1-\alpha\tau+\ln\alpha\tau)-N\ln\alpha\tau}$$

Функция в правой части этого неравенства возрастает по τ при любом $t \geqslant T_0$. Подставляя максимальное значение $\tau = \psi_2\alpha^{-1}$ и учитывая (46), (45), приходим к требуемой оценке

$$u_n \leqslant (1-\sqrt{\psi_2})^{-1} (2\pi\alpha t)^{-\frac{1}{2}} e^{-N\ln\psi_2} e^{(\alpha-\gamma_2)t}.$$

Введем обозначение

$$z_n^* = \mu^{-n} e^{\mu t} + \alpha^{-n} P e^{\alpha t}. \tag{49}$$

В дальнейшем считаем, что $A = 1/P$ (см. (14)). Тогда из (15) и (49) имеем

$$F_n^* = \frac{1}{\beta}\left(\mu - \frac{z_{n-1}^*}{z_n^*}\right).$$

Поскольку $z_n(0) \leqslant \alpha^{-n}$ (см. (6)), из (4) и (49) следует, что

$$z_n \leqslant z_n^*, \quad n \geqslant 1. \tag{50}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть начальные значения $F_k(0)$ удовлетворяют условиям (2), (12). Рассмотрим величины z_n определенные в (3). Подставляя (14) в (4), можно представить их в виде

$$z_n = \mu^{-n} h_n + \alpha^{-n} P d_n + b_n, \quad n > N, \tag{51}$$

где $d_n(t)$ определено в (48),

$$b_n(t) = \sum_{k=n-N}^{n-1} \frac{z_{n-k}(0) t^k}{k!} \leqslant \alpha^{-n} \sum_{k=n-N}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}. \tag{52}$$

Всюду в дальнейшем считаем, что $t \geqslant T_0$ (см. лемму 3).

Пусть $\delta_n = |F_n - F_n^*|$, $\tau = t/n$. Доказательство проведем отдельно для каждого из трех промежутков изменения τ.

а) Пусть $\psi_1\mu^{-1} < \tau < \psi_2\alpha^{-1}$. Согласно (49)–(51), и в силу лемм 2, 3, имеем

$$0 \leqslant z_n^* - z_n \leqslant \mu^{-n}\lambda_1 t^{-1/2} e^{(\mu-\gamma_1)t} + \alpha^{-n} P \lambda_2 t^{-1/2} e^{(\alpha-\gamma_2)t} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_3 t^{-1/2} e^{-\gamma t} z_n^*, \tag{53}$$

где $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, $\lambda_3 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Положим

$$K_1 = (1 - \lambda_3 T_0^{-1/2} e^{-\gamma T_0})^{-1}. \tag{54}$$

Из (3) и (53) следует, что

$$\delta_n = \frac{1}{\beta} \frac{z_{n-1}^*}{z_n^*} \left| \frac{z_n^* - z_n}{z_n^*} - \frac{z_{n-1}^* - z_{n-1}}{z_{n-1}^*} \right| \frac{z_n^*}{z_n} \leqslant \frac{2\mu}{\beta} K_1 t^{-1/2} e^{-\gamma t}, \tag{55}$$

поскольку $z_{n-1}^* / z_n^* \leqslant \mu$ (см. (49)). Нужная оценка получается после замены $\sqrt{t}$ на $\sqrt{T_0}$.

б) Пусть $\tau \leqslant \psi_1 \mu^{-1}$. Из (3) и (51) получаем

$$1-F_n=\frac{z_{n-1}-\alpha z_n}{z_n} \leqslant \frac{\mu^{-n+1} h_{n-1}+b_{n-1}}{\alpha^{-n} d_n},$$

поскольку $d_n > d_{n-1}$. Из (52) следует, что $b_{n-1} \leqslant \alpha^{-n}(e^{\alpha t}-d_n)$. Применяем лемму 3

$$1-F_n \leqslant K_1 \frac{\mu}{P}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^n e^{\beta t}+K_1 \mu^{-1} \lambda_2 t^{-1/2} e^{-\gamma_2 t}, \tag{56}$$

где K_1 определено в (54). Подставляя в (56) вместо n и $\sqrt{t}$ их минимальные значения $\mu t \psi_1^{-1}$ и $T_0^{1/2}$ и учитывая, что $1-F_n^* \leqslant e^{-\gamma_1 t}$, приходим к требуемому неравенству для δ_n.

в) Остается рассмотреть случай $\tau \geqslant \psi_2 \alpha^{-1}$. В отличие от а) и б) здесь возможно, что $n \leqslant N(1-\sqrt{\psi_2})^{-1}$. Согласно (3), (4) и поскольку $z_n(0) \leqslant \alpha^{-n}$; $h_n < h_{n-1}$ получаем

$$F_n=\frac{\mu z_n-z_{n-1}}{z_n} \leqslant \frac{\mu \alpha^{-n} e^{\alpha t}}{\mu^{-n} h_n} \leqslant \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n \mu K_1 e^{-\beta t}. \tag{57}$$

Последнее неравенство следует из леммы 2. Так как $n \leqslant \alpha \psi_2^{-1} t$, то, согласно (57), $F_n \leqslant \mu K_1 e^{-\gamma_2 t}$. Непосредственно проверяем, что $F_n^* \leqslant e^{-\gamma_2 t}$, следовательно, $\delta_n \leqslant (1+\mu K_1) e^{-\gamma t}$. Таким образом, во всех случаях $\delta_n \leqslant \lambda e^{-\gamma t}$, где λ — некоторая константа. Теорема доказана.

Примечание. После того, как эта статья была сдана в печать, авторам стала известна работа [19], где указан некоторый класс дифференциально-разностных уравнений, сводящихся к линейным подстановкой типа (3). Этому классу принадлежит уравнение (1). Однако основной для нас вопрос об асимптотическом поведении решений в [19] не рассматривался.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аукуционек С. П.* О теориях неравномерности технического прогресса // Экономика и мат. методы. 1986. Т. XXII, Вып. 5.
2. *Мэнсфилд Э.* Экономика научно-технического прогресса. М.: Прогресс, 1970.
3. *Сахал Д.* Технический прогресс: концепции, модели, оценки. М.: Финансы и статистика, 1985.
4. *Romeo A.* Interindustry and Interfirm Differences in the Rate of Diffusion of an Innovation // The Rev. of Economics and Statistics. 1975. V. 57. № 3.
5. *Hannan T. H., McDowell J. M.* Market Concentration and the Diffusion of New Technology in the Banking Industry // The Rev. of Economics and Statistics. 1984. V. 66. № 4.
6. *Davies S.* The Diffusion of Process Innovations. Cambridge. 1979.
7. *Варшавский А. Е.* Научно-технический прогресс в моделях экономического развития. М.: Финансы и статистика, 1984.
8. *Jensen R.* Adoptation and Diffusion of an Innovation of Uncertain Profitability // J. Econ. Theory. 1982. V. 27. № 1.
9. *Johansen L.* Production Functions. Amsterdam — London, 1972.
10. *Sato K.* Production Functions and Aggregation. Amsterdam, 1975.
11. *Петров А. А., Поспелов И. Г.* Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций. I. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 2.
12. *Шананин А. А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 12.
13. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part I: An Evolutionary Model of Innovation and Imitation // J. Economic Behaviour and Organization. 1984. V. 5. № 2.
14. *Iwai K.* Schumpeterian Dynamics. Part II: Technological Progress, Firm Growth and «Economic Selection» // J. Economic Behaviour and Organization. 1984. V. 5. № 3–4.
15. *Макаров В. Л., Торжевский А. П.* Влияние сдвигов в технических уровнях производства на макропоказатели развития экономики. Препринт. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1986.
16. *Макаров В. Л.* О динамических моделях экономики и развитии идей Л. В. Канторовича // Экономика и мат. методы. 1987. Т. XXIII. Вып. 1.
17. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
18. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
19. *Levi D., Ragnisco O., Bruschi M.* Continuous and Discrete Matrix Burgers Hierarchies // Nuovo Cimento. 1983. V. 74B. № 1.

Поступила в редакцию
6 V 1987